Prof. Alberto Guadagnini

Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento (DIIAR)

Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci, 32, 20133 Milano- Italy

EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA DINAMICA DEI FLUIDI

Note del Corso di *Meccanica dei Fluidi*

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica - Facoltà di Milano Bovisa

A.A. 1999 / 2000

Equazioni Fondamentali della Dinamica dei Fluidi

⇒ Equazione indefinita del movimento

⇒ Spinte Dinamiche

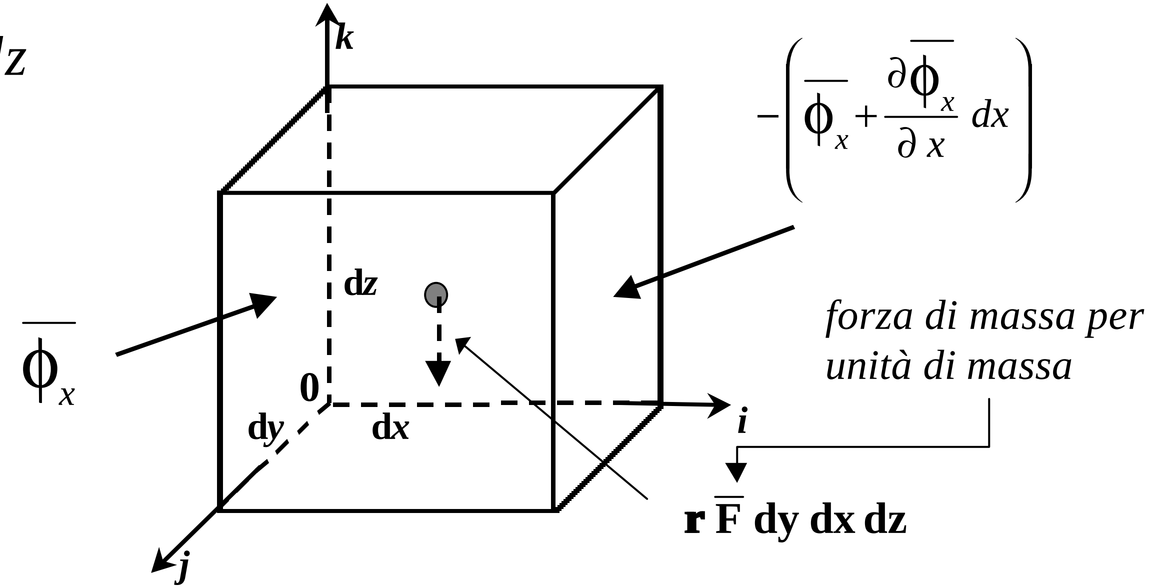
Equazione di equilibrio dinamico / fluido reale

Prima eq. cardinale della dinamica

$$\overline{R} = \overline{A} \cdot dm = \overline{A} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

⇒ forze di massa **r $\overline{\mathbf{F}}$ dy dx dz**

⇒ forze di superficie dovute alle $\overline{\phi}$ sul contorno



Forze di superficie

$$-\left(\frac{\partial \overline{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\Phi}_z}{\partial z}\right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot \overline{A} = \rho \cdot \overline{F} - \left(\frac{\partial \overline{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\Phi}_z}{\partial z}\right)$$

Equilibrio dei momenti

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_{xy} = \Phi_{yx} = \tau_z \\ \Phi_{xz} = \Phi_{zx} = \tau_y \\ \Phi_{yz} = \Phi_{zy} = \tau_x \end{cases}$$

Equazione di equilibrio dinamico / fluido reale

$$
\begin{cases}
\rho \cdot \left(F_x - \dfrac{du}{dt} \right) = \dfrac{\partial \Phi_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi_{zx}}{\partial z} = \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_z}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_y}{\partial z} \\
\rho \cdot \left(F_y - \dfrac{dv}{dt} \right) = \dfrac{\partial \Phi_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi_{zy}}{\partial z} = \dfrac{\partial \tau_z}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_x}{\partial z} \\
\rho \cdot \left(F_z - \dfrac{dw}{dt} \right) = \dfrac{\partial \Phi_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi_{zz}}{\partial z} = \dfrac{\partial \tau_y}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} \\
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \cdot \bar{v}\right) = 0 \\
\rho = \rho\left(p, T^\circ\right) \left\rangle \begin{array}{ll} liquidi & \dfrac{d\rho}{\rho} = \dfrac{dp}{\varepsilon}\left(\rho = \rho_0 \cdot \exp\left(\left(p - p_0\right)/\varepsilon\right)\right) \\ gas & \dfrac{p}{\gamma} = R \cdot T \end{array} \right.
\end{cases}
$$

5 Equazioni in 10 incognite ($\rho, u, v, w, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$)

Deformazioni: 5 equazioni (in funzione delle proprietà reologiche

Equazione di equilibrio dinamico / fluido ideale (Eq. di EULERO)

prima eq. cardinale della dinamica

$$\sum \overline{F}_m + \sum \overline{F}_s = m \cdot \overline{a}$$

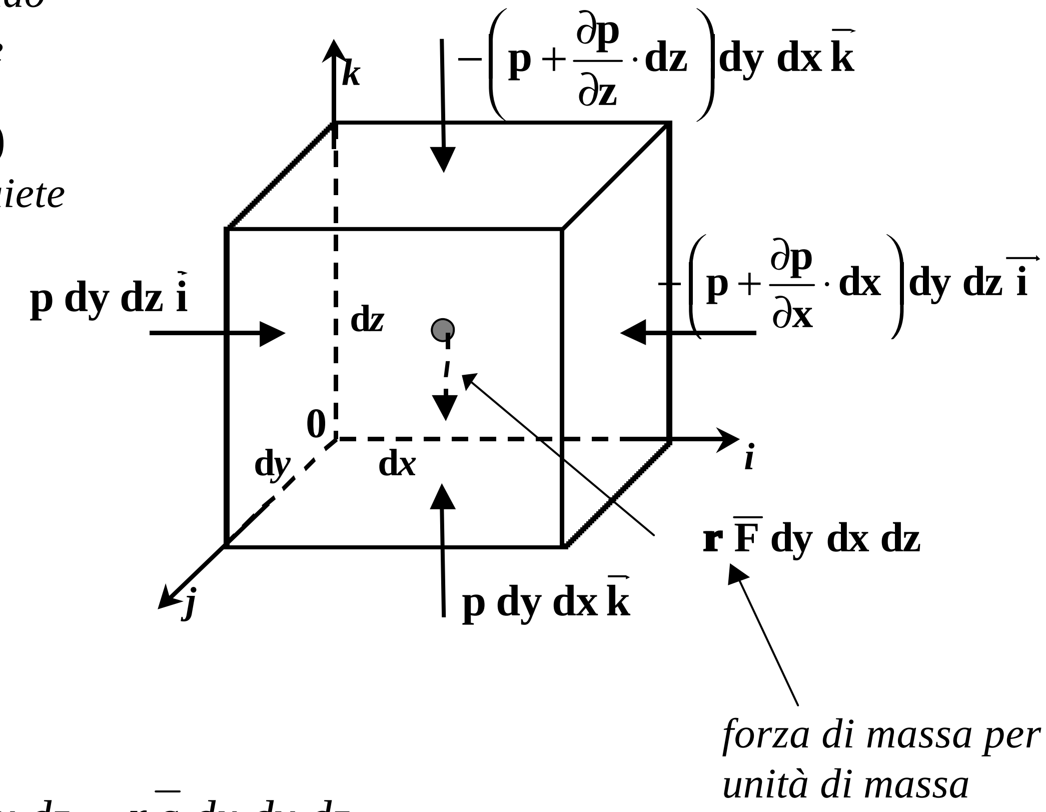
consideriamo un volumetto infinitesimo di fluido
dove con ρ e p indichiamo densità e pressione

HP.1 $\Rightarrow$ Fluido ideale (τ = 0 $\Rightarrow$ σ = p)
distribuzione di pressioni come nel fluido in quiete

$\Rightarrow$ forze di massa $\quad \rho\,\overline{\mathbf{F}}\,\mathbf{dy\,dx\,dz}$

$\Rightarrow$ forze di superficie

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dx\,dy\,dz\,\overline{i}$$
$$-\frac{\partial p}{\partial y}\cdot dx\,dy\,dz\,\overline{j}$$
$$-\frac{\partial p}{\partial z}\cdot dx\,dy\,dz\,\overline{k}$$

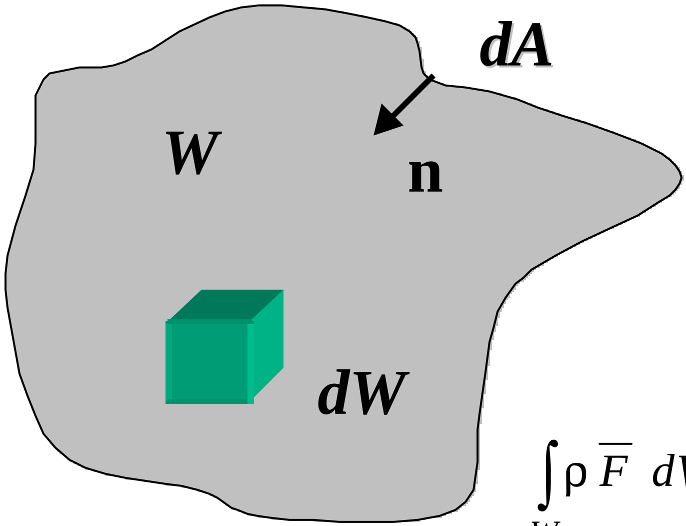


$$\rho\,\overline{F}\,dx\,dy\,dz - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\overline{k}\right)dx\,dy\,dz = \rho\,\overline{a}\,dx\,dy\,dz$$

$$\boxed{\rho\left(\overline{F} - \overline{a}\right) = \mathrm{grad}(p)}$$

Eq. di EULERO

Equazione globale di equilibrio dinamico 1.1



$$\rho\left(\overline{F}-\overline{A}\right)=\frac{\partial\overline{\phi_x}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\phi_y}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\phi_z}}{\partial z}$$

$$\int_W \rho\,\overline{F}\,dW-\int_W \rho\,\overline{A}\,dW=\int_W\left(\frac{\partial\overline{\Phi_x}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\Phi_y}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\Phi_z}}{\partial z}\right)dW=$$

$$=Green=-\int_A\left(\overline{\Phi_x}\cos\hat{n}x+\overline{\Phi_y}\cos\hat{n}y+\overline{\Phi_z}\cos\hat{n}z\right)dA=Cauchy=$$

$$=-\int_A\overline{\Phi_n}\,dA$$

Adesso analizziamo i vari termini

1. $\int_W \rho\, \overline{A}\, dW$ ⇒ $$\rho\,\overline{A} = \rho\,\frac{d\overline{v}}{dt} = \rho\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \rho\, u\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \rho\, v\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \rho\, w\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}$$

essendo $\left[\rho\, u\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} = \frac{\partial\left(\rho\, u\,\overline{v}\right)}{\partial x} - \overline{v}\,\frac{\partial(\rho\, u)}{\partial x}\right]$ **si ha che**

$$\rho\,\overline{A} = \rho\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho\, u\,\overline{v}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho\, v\,\overline{v}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho\, w\,\overline{v}\right)}{\partial z} - \overline{v}\left[\frac{\partial(\rho\, u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\, v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, w)}{\partial z}\right]$$

$$\rho\,\overline{A} = \rho\,\frac{d\overline{v}}{dt} = \rho\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \rho\, u\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \rho\, v\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \rho\, w\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}$$

Equazione globale di equilibrio dinamico 1.3

Dall'equazione di continuità $\Longrightarrow$ $div\left(\rho\,\bar{v}\right) = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

$$\rho \cdot \bar{A} = \rho \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot u \cdot \bar{v}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \cdot v \cdot \bar{v}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \cdot w \cdot \bar{v}\right) \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_W \rho \cdot \bar{A} \cdot dW = \int_W \frac{\partial\left(\rho \cdot \bar{v}\right)}{\partial t} \cdot dW + \int_W \left[\frac{\partial\left(\rho \cdot u \cdot \bar{v}\right)}{\partial x} + \ldots \right] \cdot dW =$$

$$= \int_W \frac{\partial\left(\rho \cdot \bar{v}\right)}{\partial t} \cdot dW - \int_A [\left(\rho \cdot u \cdot \bar{v}\right) \cdot \cos \widehat{nx} + \left(\rho \cdot v \cdot \bar{v}\right) \cdot \cos \widehat{ny} +$$

$$+ \left(\rho \cdot w \cdot \bar{v}\right) \cdot \cos \widehat{nz} \Big] \, d\,A = \int_W \frac{\partial\left(\rho \cdot \bar{v}\right)}{\partial t} \cdot dW - \int_A \rho \cdot \bar{v} \cdot v_n \cdot dA$$

Equazione globale di equilibrio dinamico 1.4

2. $\int_W \rho \cdot \overline{F} \cdot dW$ ⟹ **Forza di massa del volume fluido *W***

In definitiva, ottengo

$$\int_W \rho \cdot \overline{F} \cdot dW + \int_A \overline{\Phi}_n \cdot dA + \int_A \rho \cdot v_n \cdot \overline{v} \cdot dA - \int_W \frac{\partial\left(\rho \cdot \overline{v}\right)}{\partial t} \cdot dW = 0$$

$$\overline{G} \quad + \quad \overline{\Pi} \quad + \quad \overline{M}_1 \quad + \quad \overline{M}_2 \quad + \quad \overline{I} \quad = 0$$

- **Eq. di continuità già implicita**
- **Vale per ogni fluido (r = cost , r = variab.)**
- **Vale per ogni regime (laminare , turbolento)**
- **E' ricondotto ad un equilib. statico con forze fittizie d'inerzia**
- **Per moto permanente ($\overline{I} = 0$) : indipendente dalle caratteristiche del moto entro W**

Equazione globale di equilibrio dinamico 1.5

a. $\overline{G} = \int_W \rho \cdot F \cdot dW$ ⟹ **Forza di massa del volume fluido *W***

b. $\overline{\Pi} = \int_A \overline{\Phi}_n \cdot dA$ ⟹ **Spinta della superficie *A* sul fluido**

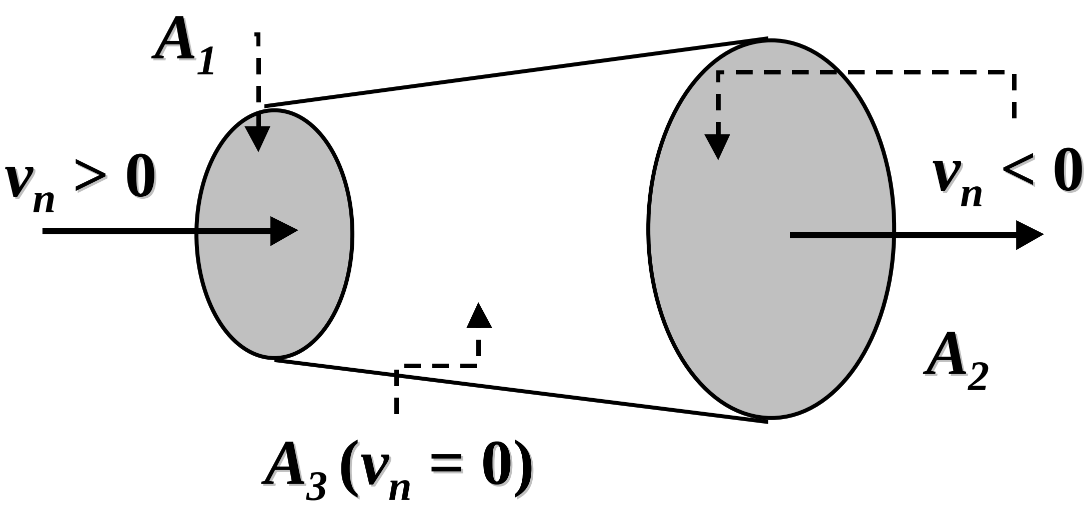
c. $\overline{M} = \int_A \rho \cdot \overline{v} \cdot v_n \cdot dA$ ⟹ **Flusso di quantità di moto attraverso la superficie di contorno *A***

$dQ = v_n \cdot dA =$ ***volume che transita / t attraverso dA***

$\rho \cdot dQ = \rho \cdot v_n \cdot dA =$ ***massa che transita / t attraverso dA***

$\overline{v} \cdot \rho \cdot dQ = \rho \cdot \overline{v} \cdot v_n \cdot dA =$ ***Quantità di moto che transita / t attraverso dA***

$\int_A \rho \cdot \overline{v} \cdot v_n \cdot dA = \overline{M} =$ ***Quantità di moto che transita / t attraverso la superficie di contorno A***



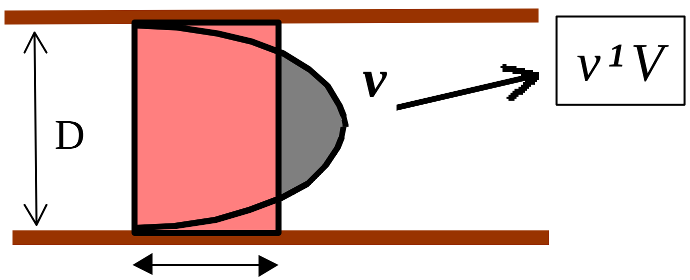
$$\overline{M}_1 = \int_{A_1} \rho \cdot \overline{v} \cdot dQ \qquad v_n > 0$$

$$\overline{M}_2 = \int_{A_2} \rho \cdot \overline{v} \cdot dQ \qquad v_n < 0$$

$$\overline{M} = \int_{A} \rho \cdot v_n \cdot \overline{v} \cdot dA = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$$

CORRENTE con SEZ. TRASVERSALE PIANA

$$\overline{M} = \int_A \rho \cdot v^2 \cdot dA = \int_A \rho \cdot v \cdot dQ \quad \Longrightarrow \quad \overline{M} = \overline{n} \cdot \beta \cdot \rho_m \cdot Q \cdot V$$



$$\beta = \frac{\int_A \rho \cdot v^2 \cdot dA}{\rho_m \cdot V^2 \cdot A}$$

b >1 , quasi sempre b » 1

d. $\overline{I} = -\int_W \frac{\partial(\rho \cdot \overline{v})}{\partial t} dW$ ⇒ ***risultante delle inerzie locali***

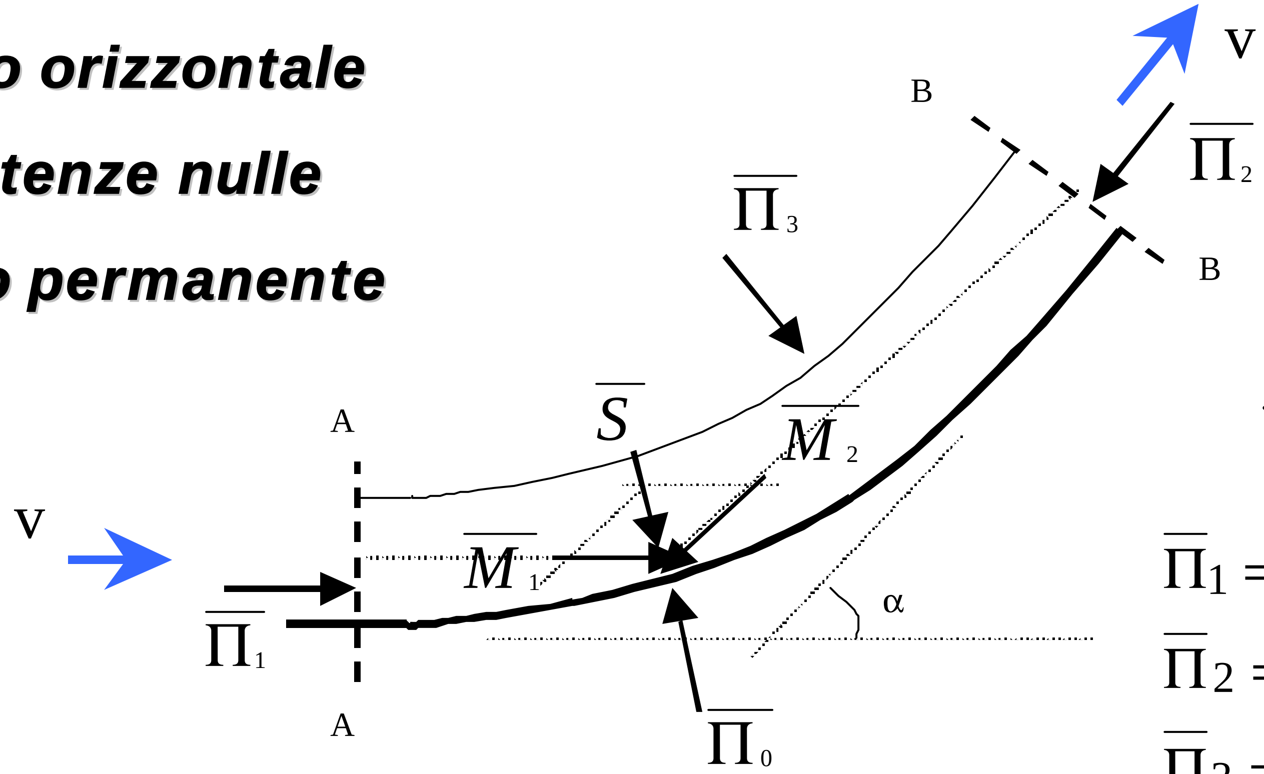
$\overline{I} = 0$ ⇒ ***Moto permanente***

$\overline{I} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_W \rho \cdot \overline{v} \cdot dW =$ ⇒ **diminuizione nel tempo della quantità di moto del fluido contenuto in W**

piano orizzontale

resistenze nulle

moto permanente



$$\overline{S} = -\overline{\Pi}_0$$

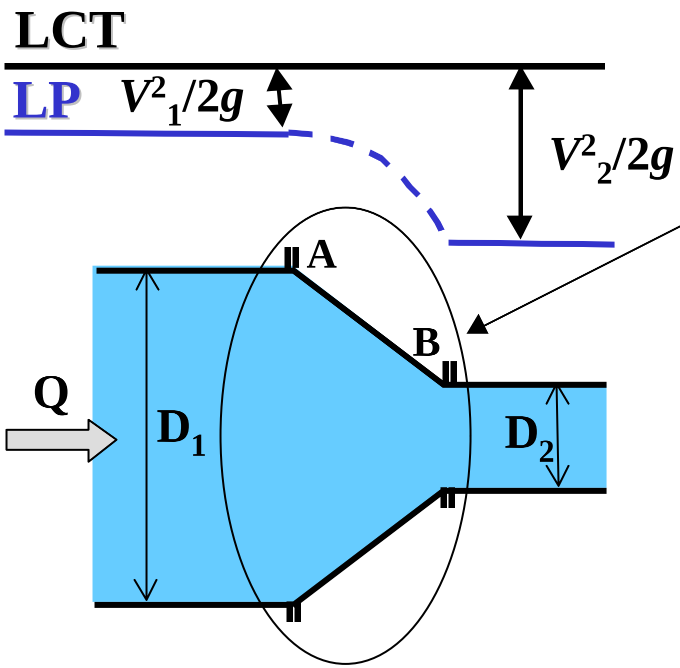
$$\overline{\Pi}_1 = 0 \qquad (p_1 = 0)$$

$$\overline{\Pi}_2 = 0 \qquad (p_2 = 0)$$

$$\overline{\Pi}_3 = 0 \qquad (p_3 = 0)$$

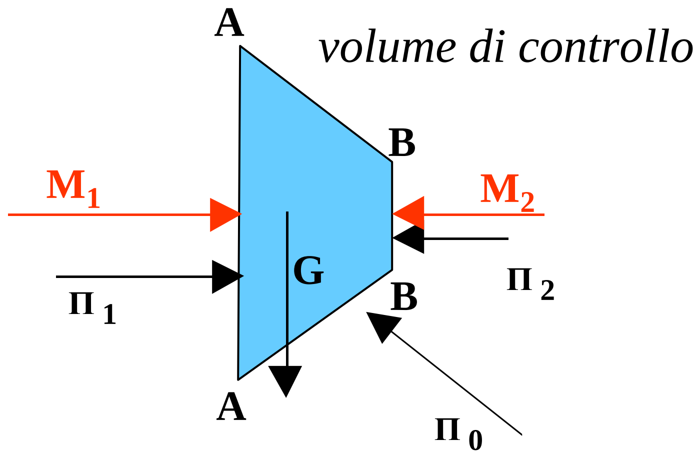
$\overline{G}$ **^ altre forze**

$$\overline{G} + \overline{\Pi}_0 + \overline{\Pi}_1 + \overline{\Pi}_2 + \overline{\Pi}_3 + \overline{M}_1 - \overline{M}_2 + \cancel{\overline{I}} = 0$$



Calcolare la spinta che la corrente fluida esercita sul tratto di convergente tra le sezioni A e B

Equilibrio globale



HP:
(1) fluido ideale;
(2) pesante;
(3) incomprimibile;
(4) moto permanente
(5) correnti lineari

$\underline{\Pi}_0 + \underline{\Pi}_1 + \underline{\Pi}_2 + \underline{G} + \underline{M}_1 + \underline{M}_2 = 0$ $\qquad$ $\underline{S} = -\underline{\Pi}_0$ $\qquad$ $\underline{S} = \underline{\Pi}_1 + \underline{\Pi}_2 + \underline{G} + \underline{M}_1 + \underline{M}_2$

dove:

$\underline{\Pi}_0$ = forza incognita

$\underline{\Pi}_1$ e $\underline{\Pi}_2$ = spinte statica sulle sup. AA e BB

$\underline{G}$ = forza di massa

$\underline{M}_1$ e $\underline{M}_2$ = flussi di quantità di moto sulle sup. AA e BB *(quantità di moto nell'unità di tempo)*

$\Pi_1 = \gamma\, h_A\, A_A$

$\Pi_2 = \gamma\, h_B\, A_B$

$G = \gamma\, W$

$M_1 = \rho\ Q\ V_1$

$M_2 = \rho\ Q\ V_2$

Nota:

***V** deve essere* $\perp$ alla sup.

$$\overline{M} = \int_A r \cdot \overline{v} \cdot v_n \cdot dA$$