Prof. Alberto Guadagnini

Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento (DIIAR)

Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci, 32, 20133 Milano- Italy

DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI

Note del Corso di *Meccanica dei Fluidi*

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica - Facoltà di Milano Bovisa

A.A. 2000 / 2001

Dinamica dei Fluidi Ideali

⇒ Equazione indefinita dell'equilibrio dinamico / fluidi ideali

⇒ Teorema di Bernoulli

⇒ Teorema di Bernoulli - estensione alle correnti

⇒ Processi di Efflusso ed esempi

⇒ Correnti in pressione

⇒ Spinte dinamiche

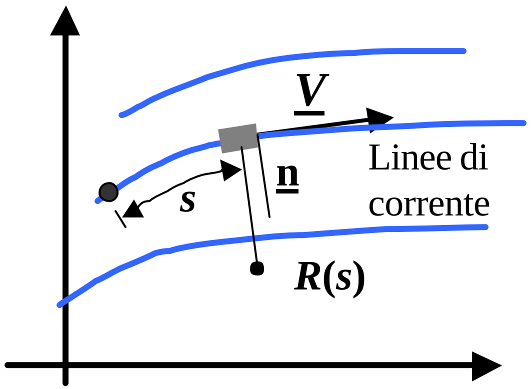
⇒ Teorema di Bernoulli - estensione ai fluidi reali

Fluidi ideali – Il Teorema di Bernoulli

- **Fluido ideale (non-viscoso): si assume che il fluido abbia zero - viscosità (τ = 0)**
- **Il moto di una particella di fluido è governato esclusivamente da forze di pressione e di gravità $\Rightarrow$ Seconda Legge di Newton**

  (*forza netta di pressione*) + (*forza netta di gravità*) = (*massa*) $\times$ (*accelerazione*)

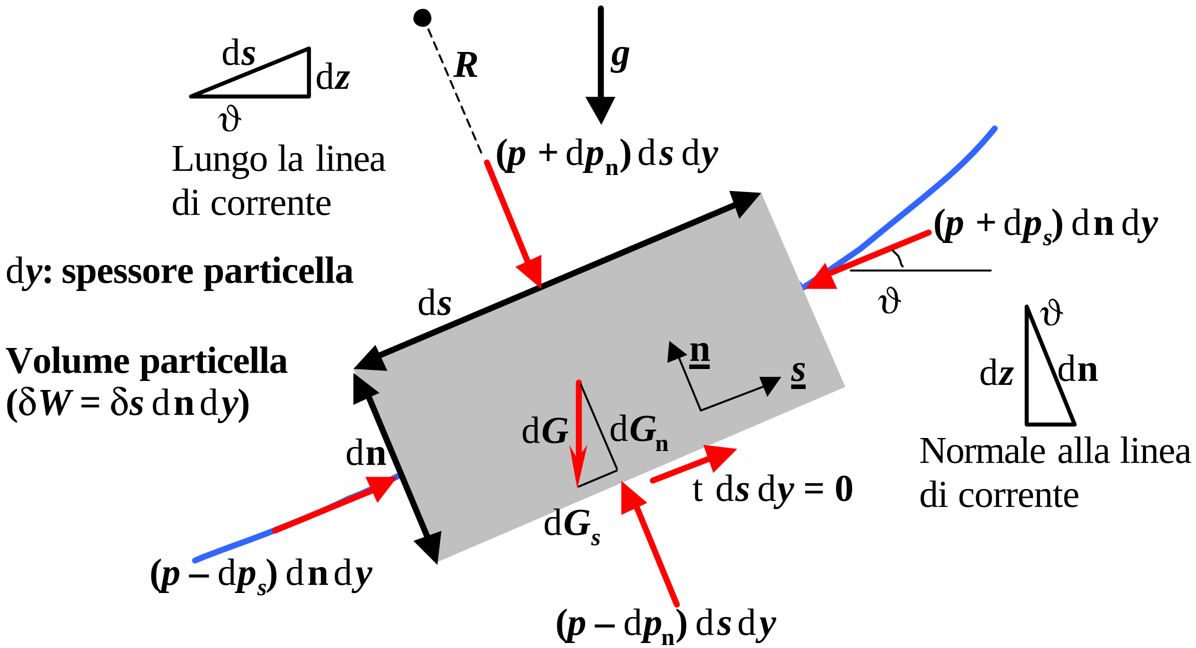
- **Iniziamo con un moto bi-dimensionale, *stazionario***



$\underline{a} = \underline{a}(s, n) \Rightarrow a_s = V\, \partial V / \partial s;\ a_n = V^2/R$

$\partial V / \partial s \neq 0 \Rightarrow$ **accelerazione lungo la traiettoria**

$R \neq \infty$ (la particella non segue una traiettoria rettilinea) $\Rightarrow$ accelerazione normale alla traiettoria



Equazione del moto lungo <u>s</u>

$S\delta F_s = \delta m\, a_s = \delta m\, V\,\partial V / \partial s$

$= r\ \delta W\, V\,\partial V / \partial s$

$$\boxed{-\gamma \sin\vartheta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s} = \rho\ a_s}$$

Forza di massa

$\delta G_s = -\,\delta G \sin\vartheta = -\,g\,\delta W \sin\vartheta$

Forza di Pressione (*p* non costante nel campo per effetto del peso)

$\delta p_s \approx (\partial p/\partial s)\,\delta s / 2$ (serie di Taylor)

$\delta F_{ps} = (p - dp_s)\,d\mathbf{n}\,dy - (p + dp_s)\,d\mathbf{n}\,dy = -\,2\,dp_s\,d\mathbf{n}\,dy$

$= -\,(\partial p/\partial s)\,\delta s\,d\mathbf{n}\,dy = -\,(\partial p/\partial s)\,\delta W$

Il valore effettivo di *p* non è importante; conta il differenziale. C'è un gradiente di pressione $\nabla p = \partial p/\partial s\ \underline{s} + \partial p/\partial n\ \underline{n} \neq 0$ che causa una forza di pressione netta sulla particella.

Riarrangiando:

lungo una linea di corrente, il valore di n è costante
(dn = 0) $\Rightarrow$ $dp = (\partial p/\partial s)\, ds + (\partial p/\partial n)\, dn = (\partial p/\partial s)\, ds$

$\sin \vartheta = dz / ds$

$V\, \partial V / \partial s = (1/2)\, \partial V^2 / \partial s$

$\partial p / \partial s = dp / ds$

$$-\gamma \frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds} = \frac{1}{2}\rho \frac{dV^2}{ds} \quad \Rightarrow \quad dp + \frac{1}{2}\rho dV^2 + \gamma\, dz = 0$$

Lungo una linea di corrente

Integrando

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + g\, z = C$$

Lungo una linea di corrente

La costante, *C*, può essere determinata dalle condizioni in un dato punto sulla linea di corrente. Difficoltà nell'integrare il termine di pressione: r = r (*p*, temperatura)

Densità, r, costante

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma\, z = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \text{costante}}$$

EQUAZIONE DI BERNOULLI

(1) Effetti viscosi trascurabili; (2) flusso stazionario; (3) fluido incomprimibile; (4) equazione applicabile lungo una linea di corrente; (5) assenza di scambi energetici con l'esterno (sistema chiuso)

Equazione del moto lungo la normale, n, alla traiettoria

$S\delta F_n = \delta m\, a_n = \delta m\, V^2 / R =$ r $\delta W\, V^2 / R$

Forza di massa

$\delta G_n = -\,\delta G \cos\vartheta = -\,g\,\delta W \cos\vartheta$ **(ϑ = p/2 linea di corrente verticale; il peso non contribuisce)**

Forza di Pressione (p non costante nel campo per effetto del peso)

$\delta p_n \approx (\partial p / \partial n)\, \delta n / 2$ **(serie di Taylor)**

$\delta F_{pn} = (p - dp_n)\, ds\, dy - (p + dp_n)\, ds\, dy = -\,2\, dp_n\, ds\, dy = -\,(\partial p / \partial n)\, \delta s\, dn\, dy = -\,(\partial p / \partial n)\, \delta W$

Bilancio:

$$\sum \delta F_n = \delta G_n + \delta F_{pn} = \left[-\gamma \cos\vartheta - \frac{\partial p}{\partial n} \right] \delta W$$

$$\boxed{\cos\vartheta = dz / dn}$$

$$\boxed{-\gamma \frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho V^2}{R}}$$

Interpretazione fisica: un cambiamento nella direzione del moto di una particella fluida (traiettoria curvilinea, $R < \infty$) è accompagnato da una appropriata combinazione di (a) gradiente di pressione e (b) componente del peso della particella lungo la normale alla traiettoria

Se trascuro la gravità (flusso di gas), oppure se il flusso è orizzontale

$$\frac{\partial p}{\partial \mathrm{n}} = -\frac{\rho V^2}{R}$$

La p cresce con la distanza dal dal centro di curvatura (**n** *punta verso l'interno* della linea di corrente curva, per cui $\partial p/\partial \mathrm{n} < 0$)

Esempio: la pressione all'esterno di un tornado ($p = p_{atm}$) è maggiore della pressione al centro ($\approx$ vuoto). Questa Δp è necessaria per bilanciare le accelerazioni centrifughe associate con il moto del fluido.

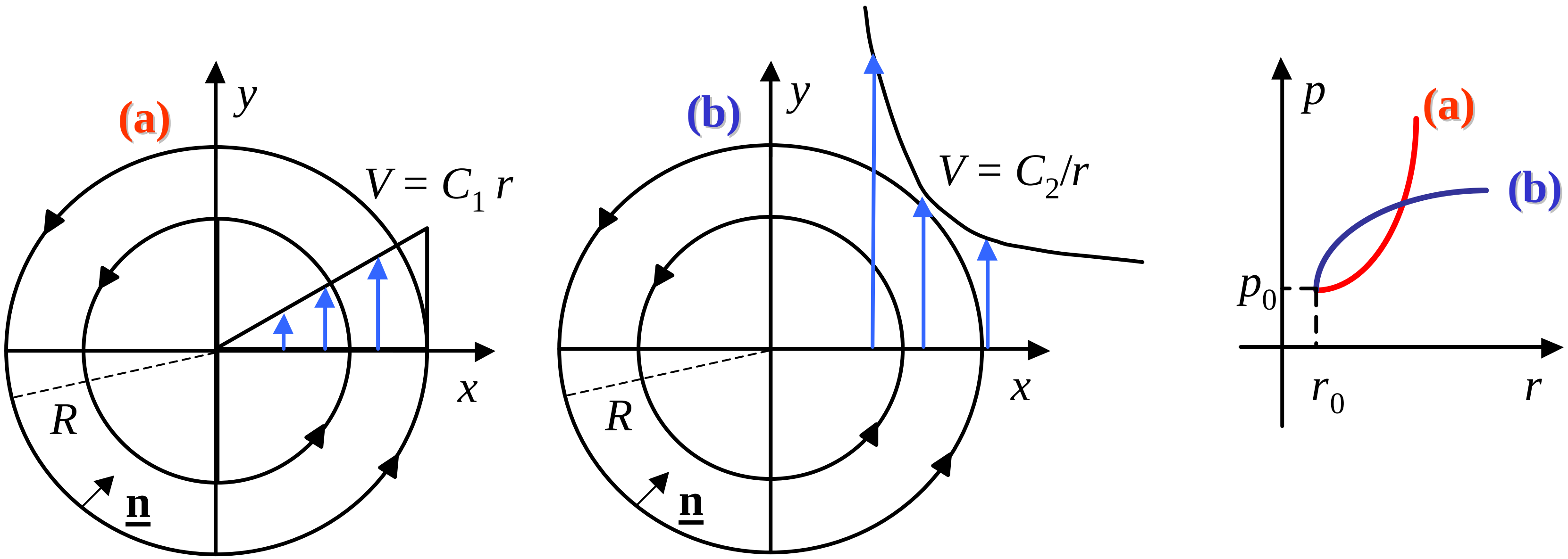
Integro e tengo conto del fatto che *s* = costante lungo n

$$\int \frac{dp}{\rho} + \int \frac{V^2}{R}\, d\mathrm{n} + g\, z = C$$

L'integrazione non può essere completata senza conoscere la dipendenza da n in *V* = *V*(*s*, n); *R* = *R*(*s*, n)

$$p + \rho \int \frac{V^2}{R}\, d\mathrm{n} + \gamma\, z = \text{costante lungo } \underline{\mathbf{n}}$$

Per densità, r, costante



Moto stazionario su piano orizzontale ($dz / d\mathrm{n} = 0$); linee di corrente circolari ($\partial / \partial \mathrm{n} = - \partial / \partial r$; raggio di curvatura $R = r$); fluido ideale, incomprimibile $\Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial r} = \dfrac{\rho V^2}{r}$

(a)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho C_1^2 r$$

(b)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho C_2^2}{r^3}$$

In (a) e (b) $\partial p / \partial r > 0 \Rightarrow p \uparrow$ se $r \uparrow$

Integrando rispetto ad r, partendo da una pressione nota, p_0, in $r = r_0$

$$p = \frac{1}{2}\rho C_1^2 (r^2 - r_0^2) + p_0 \qquad p = \frac{1}{2}\rho C_2^2 \left[\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right] + p_0$$

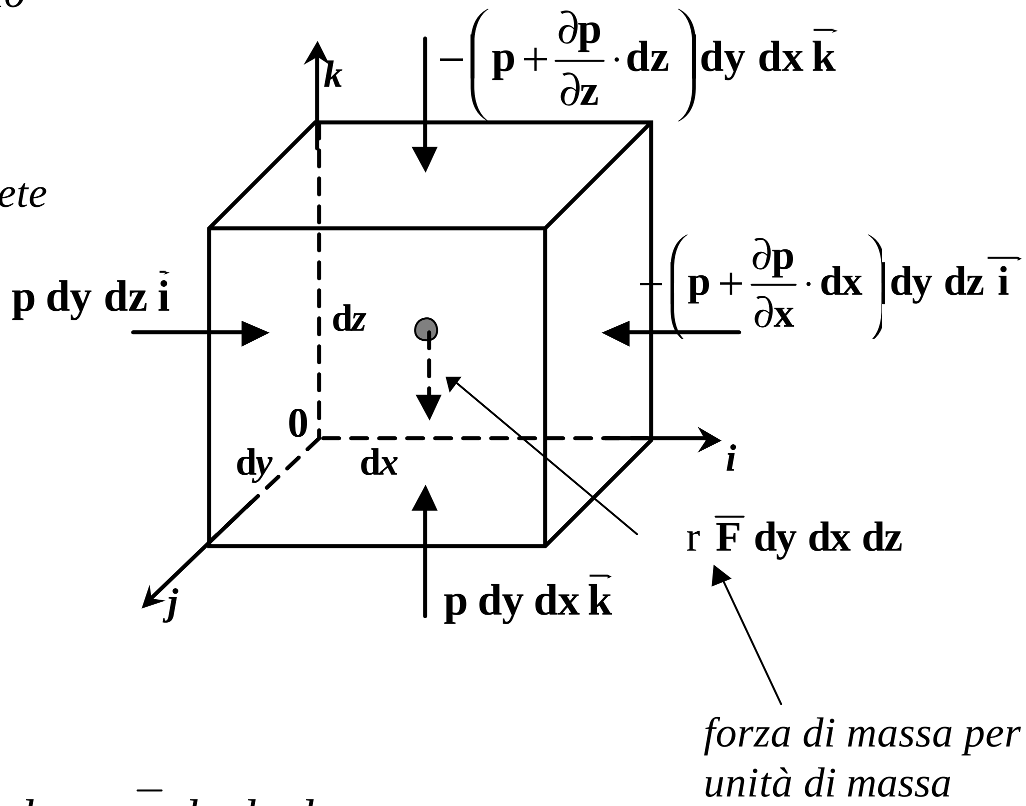
Equazione di equilibrio dinamico / fluido ideale (Eq. di EULERO)

prima eq. cardinale della dinamica

$$\sum \overline{F}_m + \sum \overline{F}_s = m \cdot \overline{a}$$

consideriamo un volumetto infinitesimo di fluido
dove con r e p indichiamo densità e pressione

HP.1 Þ Fluido ideale (t = 0 Þ s =p)
distribuzione di pressioni come nel fluido in quiete



$\Rightarrow$ forze di massa r $\overline{\mathbf{F}}$ **dy dx dz**

$\Rightarrow$ forze di superficie

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx\, dy\, dz\, \overline{i}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} \cdot dx\, dy\, dz\, \overline{j}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} \cdot dx\, dy\, dz\, \overline{k}$$

$$r\, \overline{F}\, dx\, dy\, dz - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\overline{k} \right) dx\, dy\, dz = r\, \overline{a}\, dx\, dy\, dz$$

$$\boxed{r\left(\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{a}}\right) = \mathbf{grad}(\mathbf{p})}$$

Eq. di EULERO

Sistema energeticamente chiuso; Fluido ideale (t = 0)

$$r\,(\underline{F} - \underline{a}) = \nabla p \quad \textbf{(Eulero)}$$

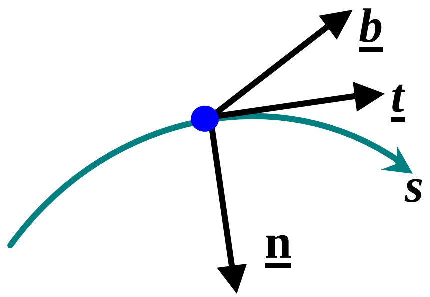
Moto uniforme e quiete:
$\underline{a} = 0$; $\nabla(z+p/\gamma)=0$

Campo gravitazionale: $\underline{F} = -g\,\nabla z$

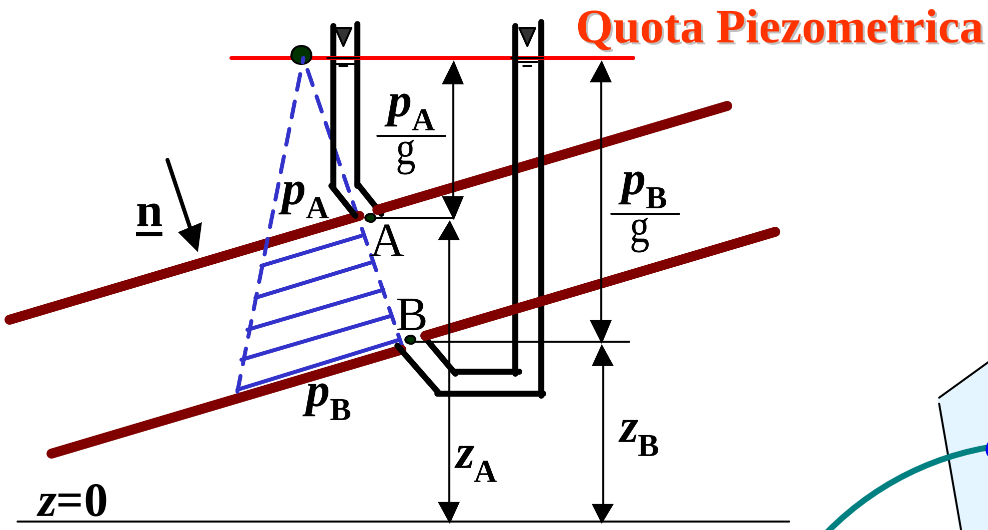
Fluido incomprimibile: r **= costante**

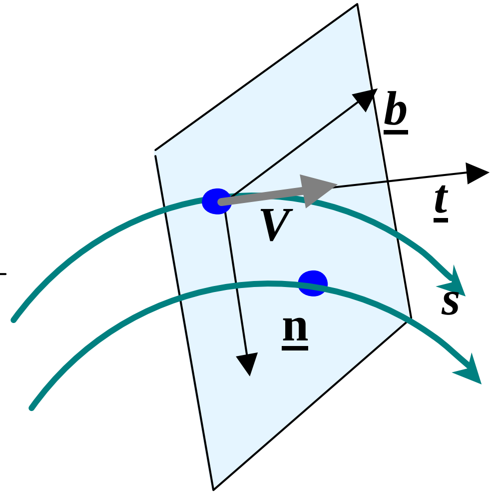
$$r\underline{F} = -\,r g\,\nabla z = -\nabla(r z) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\underline{a}}{g} = -\frac{1}{g}\frac{d\underline{V}}{dt} = \nabla\left[z + \frac{p}{\gamma}\right]$$

Proiezioni ($v = |\underline{V}|$)



$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\left[z + \dfrac{p}{\gamma}\right] = -\dfrac{1}{g}\dfrac{dv}{dt} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial n}\left[z + \dfrac{p}{\gamma}\right] = -\dfrac{v^2}{gr} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial b}\left[z + \dfrac{p}{\gamma}\right] = 0 \end{cases}$$





$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial s}\left[z+\dfrac{p}{\gamma}\right] = -\dfrac{1}{g}\dfrac{dv}{dt} \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial n}\left[z+\dfrac{p}{\gamma}\right] = -\dfrac{v^2}{gr} \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial b}\left[z+\dfrac{p}{\gamma}\right] = 0
\end{cases}
$$

HP: *Traiettorie rettilinee*:

$\boldsymbol{r} = \infty \Rightarrow v^2/(g\,r) = 0$

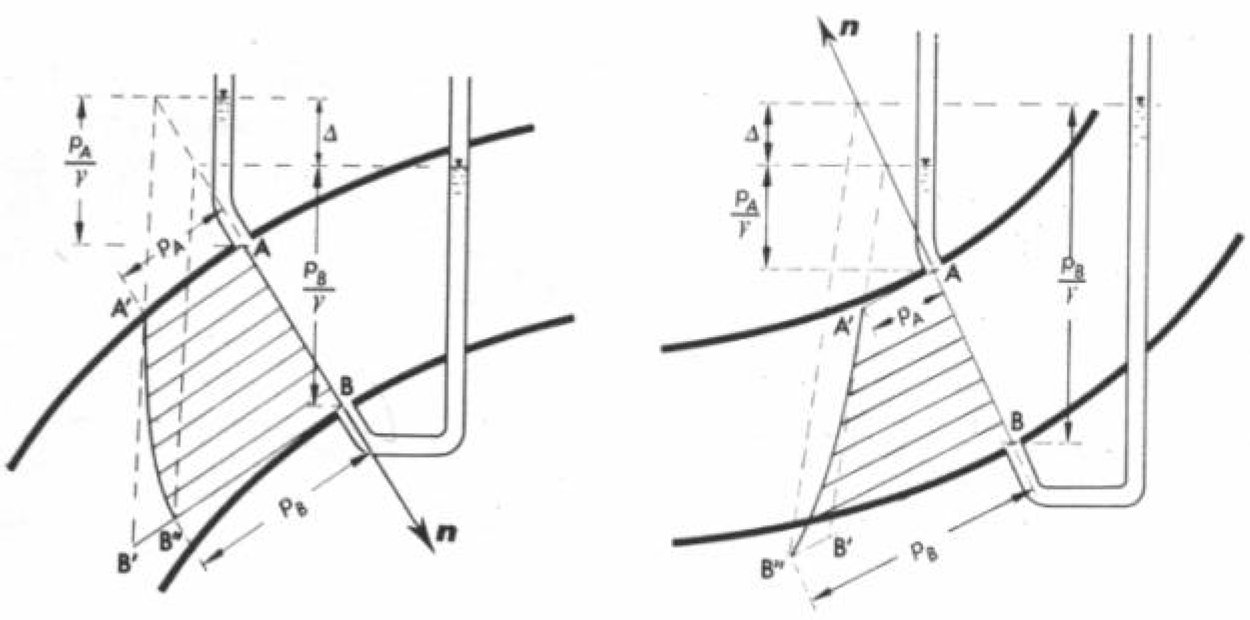
$$\frac{\partial}{\partial n}\left[z+\frac{p}{g}\right]=0$$

Il termine $\boldsymbol{z} + \dfrac{\boldsymbol{p}}{\mathrm{g}}$ **è costante su tutta la sezione**

La distribuzione delle pressioni sulla sezione è idrostatica

Traiettorie curvilinee:

$z + \frac{p}{g}$1 costante



$$\frac{\partial}{\partial n}\left[z + \frac{p}{\gamma}\right] = -\frac{v^2}{gr}$$

$$\Delta = \left[z_B + \frac{p_B}{\gamma}\right] - \left[z_A + \frac{p_A}{\gamma}\right] = -\int_A^B \frac{v^2}{gr}\,dr$$

un solo punto non è in grado di rappresentare la distribuzione di pressioni in una sezione

---

HP: *se r* è abbastanza grande Þ ***Correnti lineari o gradualmente variate***

$\Rightarrow$ $\frac{v^2}{gr} \cong 0$ $\Rightarrow$ $\left[z + \frac{p}{\gamma}\right]_n \cong \text{costante}$

la distribuzione delle pressioni sulla sezione può essere considerata idrostatica

Lungo la traiettoria

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[z+\frac{p}{\gamma}\right]=-\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}$$

***v* = *v*(*t*, *s*(*t*))**

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial s}\frac{ds}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[z+\frac{p}{\gamma}\right]=-\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$$

Carico Totale

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}\right]=-\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}H=-\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

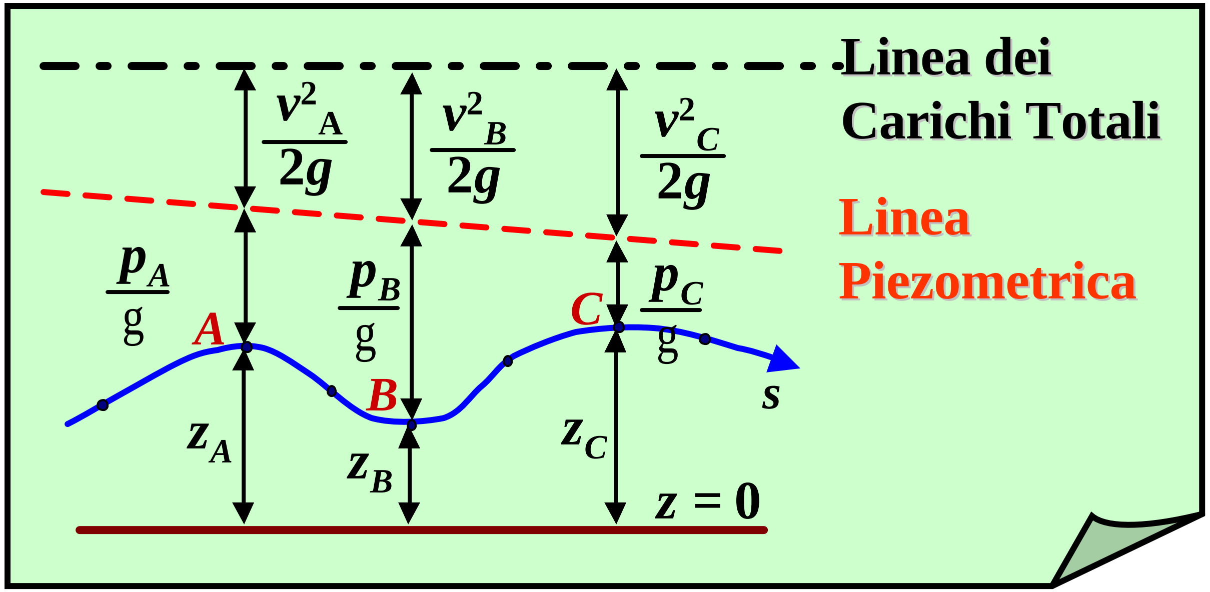
Ipotesi: **(1)** fluido ideale; **(2)** pesante; **(3)** incomprimibile; **(4)** moto permanente

Moto Permanente

$$\frac{\partial H}{\partial s}=0$$

$$\boxed{H=z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}= \text{Costante lungo la traiettoria}}$$

Interpretazione fisica



Il lavoro compiuto su una particella dalle forze che su questa agiscono è uguale alla variazione dell'energia cinetica della particella stessa

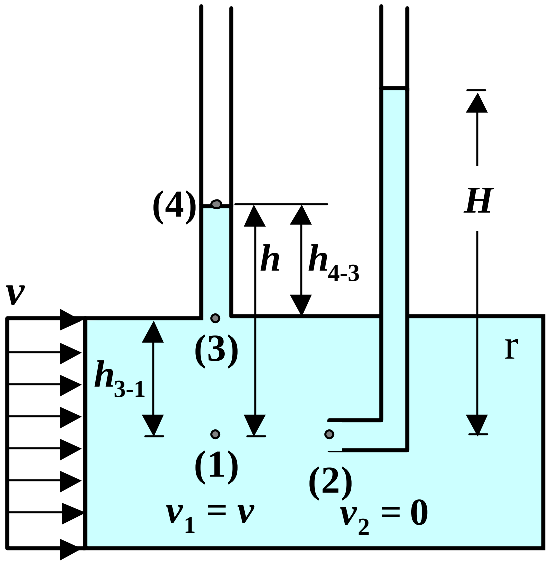
$$z + \frac{p}{g}$$

QUOTA PIEZOMETRICA

H **= energia specifica (per unità di peso) = CARICO TOTALE**

- $z \Rightarrow$ **energia posizionale (peso = 1)** $\Rightarrow$ **lavoro dell'unità di peso**
  ALTEZZA GEODETICA
- $v^2/2g \Rightarrow$ **energia cinetica (peso = 1)** $\Rightarrow$ **lavoro dell'unità di peso** $[(1/2\ m\ v^2)/mg]$
  ALTEZZA CINETICA (altezza di caduta libera per raggiungere ***v*****)**
- $p/g \Rightarrow$ **energia di pressione (peso = 1)** $\Rightarrow$ **lavoro dell'unità di pes**
  ALTEZZA DI PRESSIONE (altezza di colonna di fluido per produrre la pressione ***p*****)**

Pressione statica, dinamica, totale – punto di ristagno



$p_2 = p_1 + (1/2)\,\rho\, v^2_1$

La pressione nel punto di ristagno è maggiore della pressione statica p_1 della quantità (1/2) ρ v^2_1, *pressione dinamica*

Pressione totale

$$p_T = p + (1/2)\,\rho\, v^2 + \gamma z$$

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = \text{costante}$$

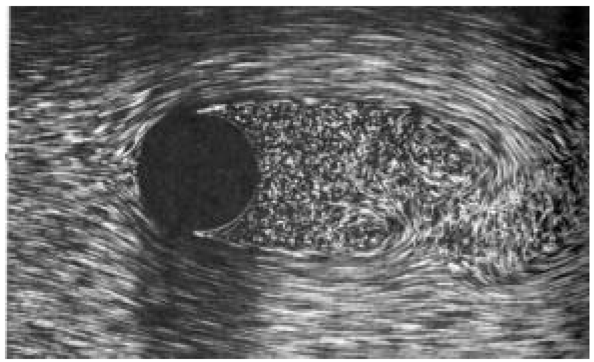
Ciascun termine può essere interpretato come una forma di pressione [N/m²]

***p*: pressione termodinamica (*pressione statica*)**

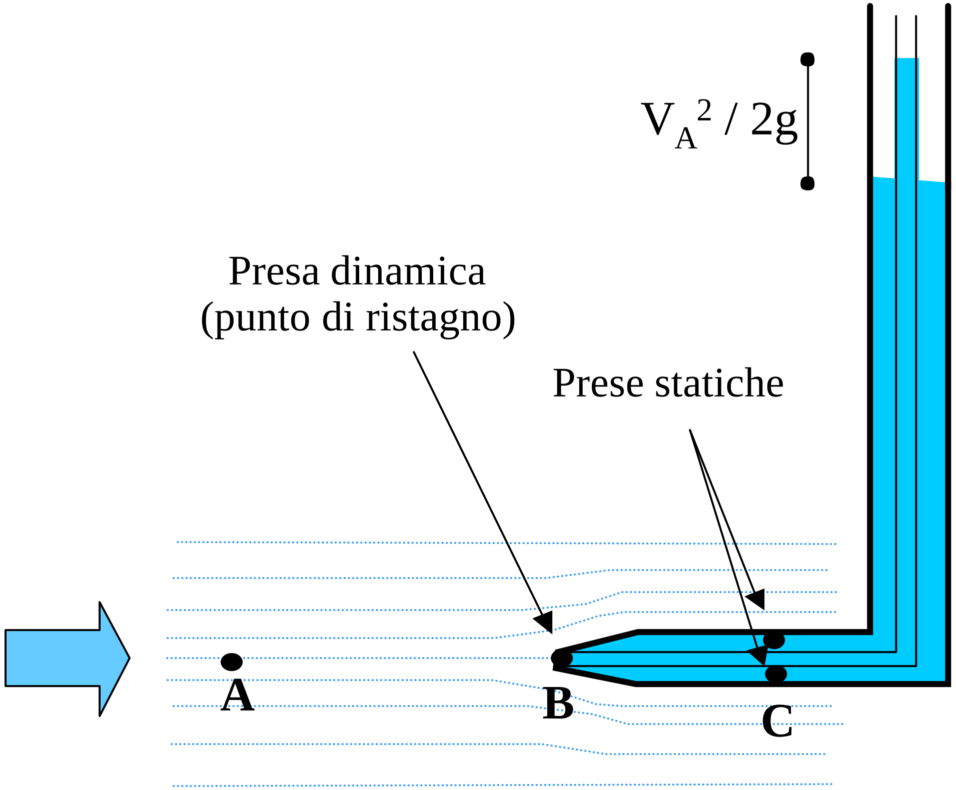
$p_1 = \gamma\, h_{3-1} + p_3 = \gamma\, h$ **(*come se il fluido fosse fermo*)**

γz: pressione idrostatica - Variazione di pressione possibile per variazioni di energia potenziale del fluido, a seguito di cambiamenti di quota

$(1/2)\,\rho\, v^2$: pressione dinamica – Visualizzabile in (2), punto di ristagno



Misura delle velocità – TUBO DI PITOT

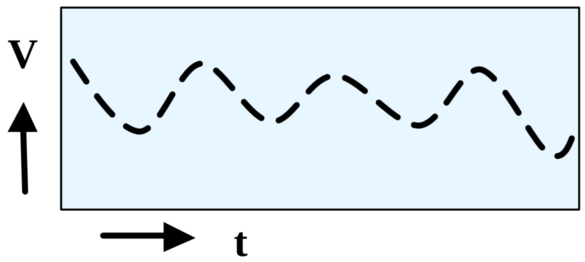


$$H_B = z_B + p_B/\gamma = H_A = z_A + p_A/\gamma + V_A^2/2g$$

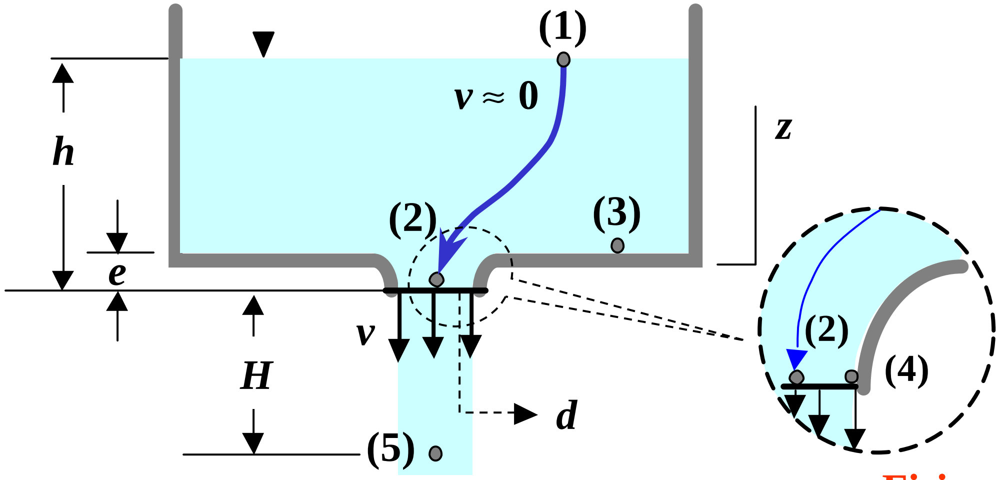
$$\boxed{V = \sqrt{2(p_B - p_A)/\rho}}$$

Abbinando al Pitot una cella di pressione è più facile acquisire l'andamento temporale delle velocità

Informazione in uscita



PROCESSI DI EFFLUSSO



$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

Tra due punti su di una traiettoria

Pressione uguale a p_{atm}: traiettorie rettilinee – p_2 ° p_4

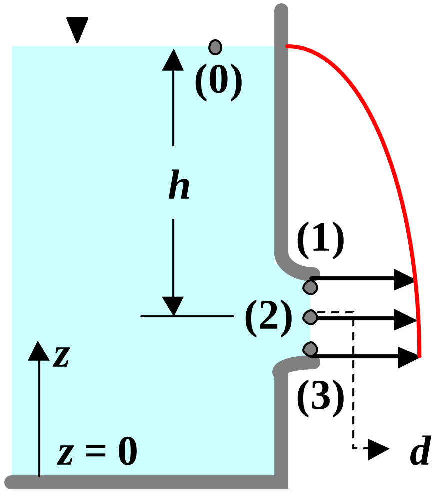
Fisicamente: dal momento che non c'è componente della forza peso (o accelerazione) in direzione normale, la *p* è costante in quella direzione

Tra (1) e (2): $h = v^2 / 2g$ Þ $v = \sqrt{2\,g\,h}$ **TORRICELLI**

ottenibile anche scrivendo l'equazione di Bernoulli fra i punti (3) e (4): $v_3 \approx 0$; p_3 = g $(h - e)$

Tra (2) e (5) il fluido accelera: $v_5 = \sqrt{2\,g\,(h+H)}$

Tutta l'energia potenziale di una particella è convertita in energia cinetica



$d << h$ Þ la velocità del baricentro della vena è una ragionevole *velocità media* (distribuzione parabolica)

$$z_0 + \cancel{\frac{p_0}{\gamma}} + \cancel{\frac{v_0^2}{2g}} = z_2 + \cancel{\frac{p_2}{\gamma}} + \frac{v_2^2}{2g} \Longrightarrow v_2 = \sqrt{2\,g\,(z_0 - z_2)} = \sqrt{2\,g\,h}$$

$$v_e = 0.98 - 0.99\, v = C_v \sqrt{2\,g\,h} \quad \textit{effettiva}$$

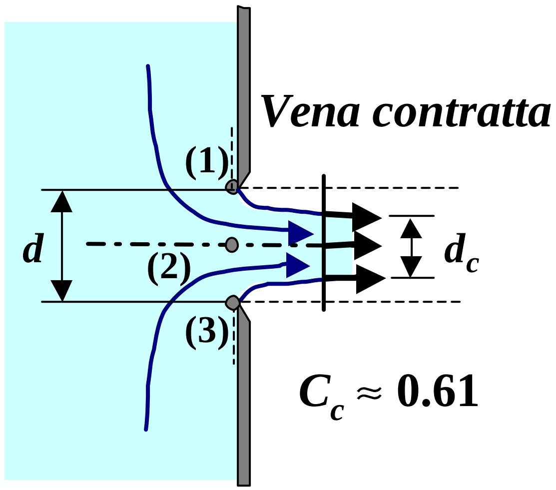
$$Q = A_c\, v_e = A_c\, C_v \sqrt{2\,g\,h} = A\, C_c\, C_v \sqrt{2\,g\,h}$$

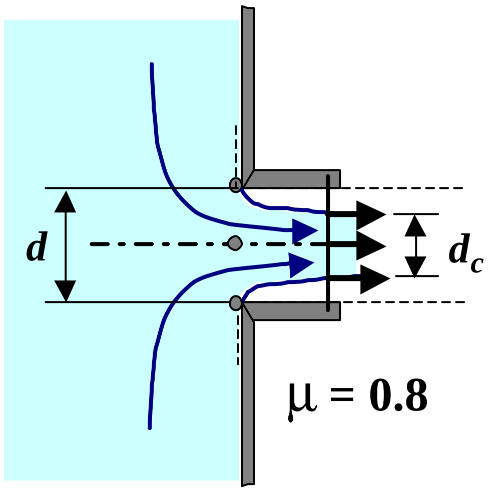
$A_c = C_c\, A;$

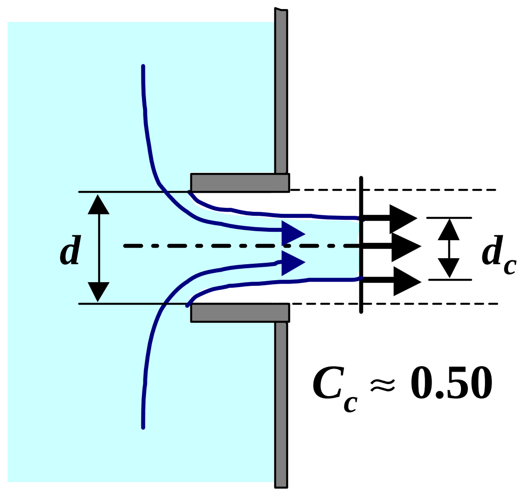
Cc = coefficiente di contrazione

$$\boxed{Q = \mu\, A \sqrt{2\,g\,h} \qquad \mu = C_c\, C_v}$$

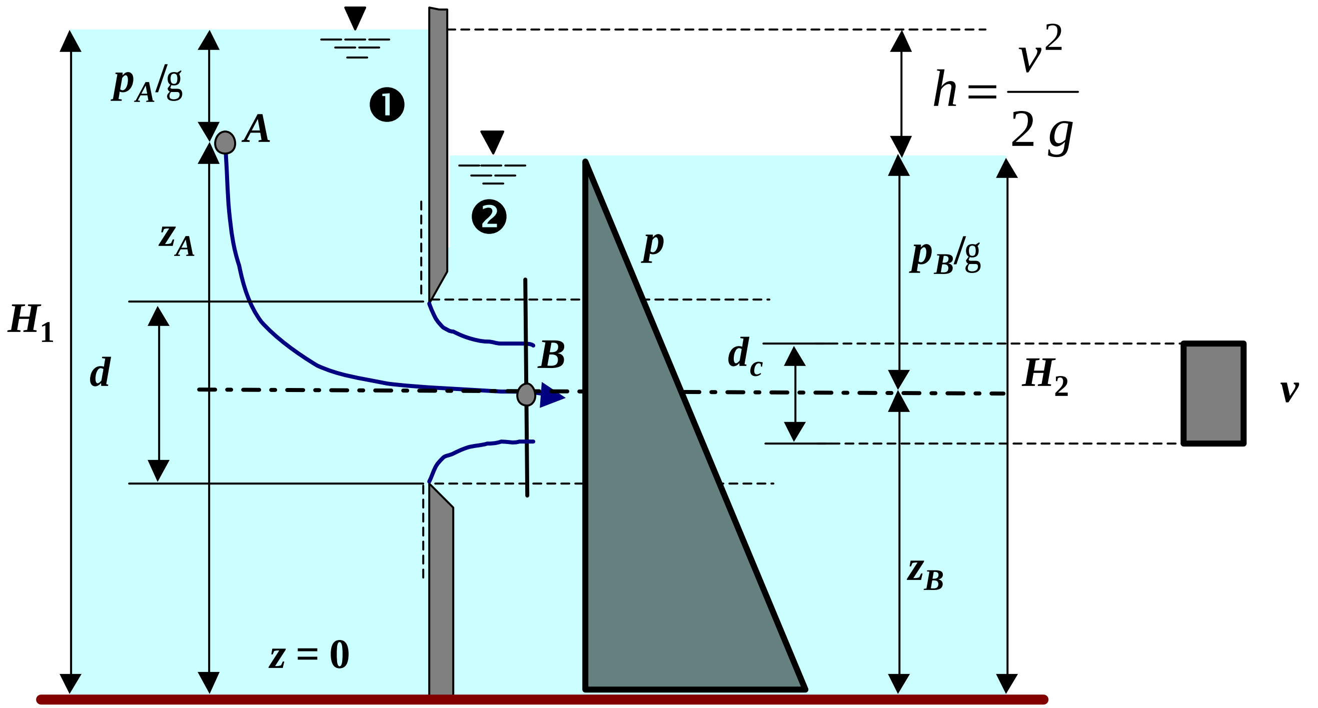
coefficiente di efflusso





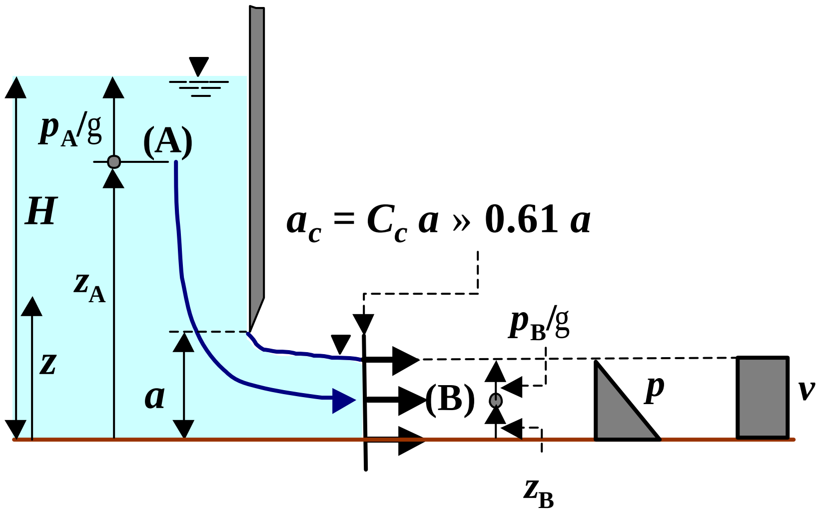


Vena sommersa



$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \cancel{\frac{v_A^2}{2g}} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad v = v_t = \sqrt{2\,g\,(H_1 - H_2)} = \sqrt{2\,g\,h}$$

Efflusso da paratoia

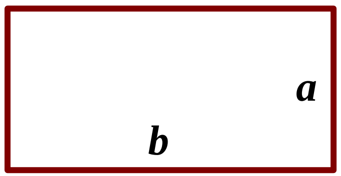


In (B): corrente gradualmente variata ➡ ***z*** **+** ***p*****/g = costante**

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \cancel{\frac{v_A^2}{2g}} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}$$

➡

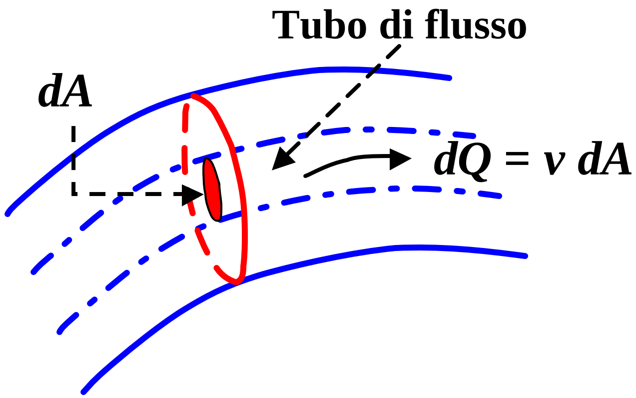
$$v_t = \sqrt{2\,g\,(H - C_c\,a)}$$



Sezione rettangolare

$$Q = \mu\,a\,b\,\sqrt{2\,g\,(H - C_c\,a)}$$

Teorema di Bernoulli per correnti



Potenza di una corrente

$dP = (\gamma\, dQ) \times H$; H = carico totale (energia meccanica)

$$P = \int_Q \gamma H\, dQ = \int_A \gamma H\, v\, dA = \gamma \int_A \left[z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right] v\, dA$$

Per ogni tubo di flusso, fluido ideale: $\begin{cases} H = \text{costante} \\ \gamma\, dQ = \text{costante} \end{cases} \Rightarrow dP = \text{costante}$

La potenza, *P*, di una corrente di fluido ideale, incomprimibile, in condizioni di moto permanente, si mantiene costante, cioè assume lo stesso valore su tutte le successive sezioni trasversali.

Fino a qui è tutto vero per qualunque tipo di corrente. Adesso, vediamo cosa succede per correnti lineari

Corrente lineare (gradualmente variata): $z + p/\gamma$ = costante

Potenza cinetica

$$P = \gamma \int_A \left[z + \frac{p}{\gamma} \right] v \, dA + \gamma \int_A \frac{v^2}{2g} v \, dA = \gamma \left[z + \frac{p}{\gamma} \right] Q + P_c$$

In generale, $v \neq$ costante su di una sezione trasversale

Coefficiente di ragguaglio, α, della potenza cinetica (coefficiente di Coriolis)

Moto uniforme turbolento: $\alpha \approx 1$ (1.06 – 1.08)

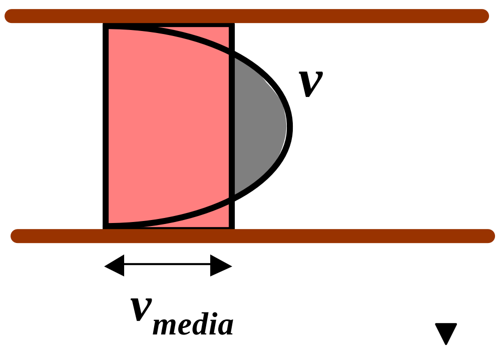
Moto uniforme laminare : $\alpha = 2$

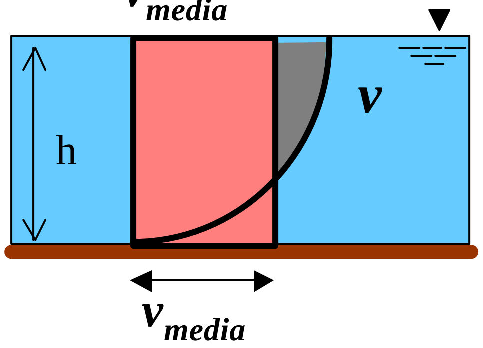
$$\alpha = \frac{\gamma \int_A \frac{v^2}{2g} v \, dA}{\gamma \frac{v_{media}^3}{2g} A}$$

$$P_c = \gamma \, \alpha \frac{v_{media}^2}{2g} Q$$

$$P = \gamma \left[z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{v_{media}^2}{2g} \right] Q = \gamma \, H_{medio} \, Q \quad \textbf{= costante}$$

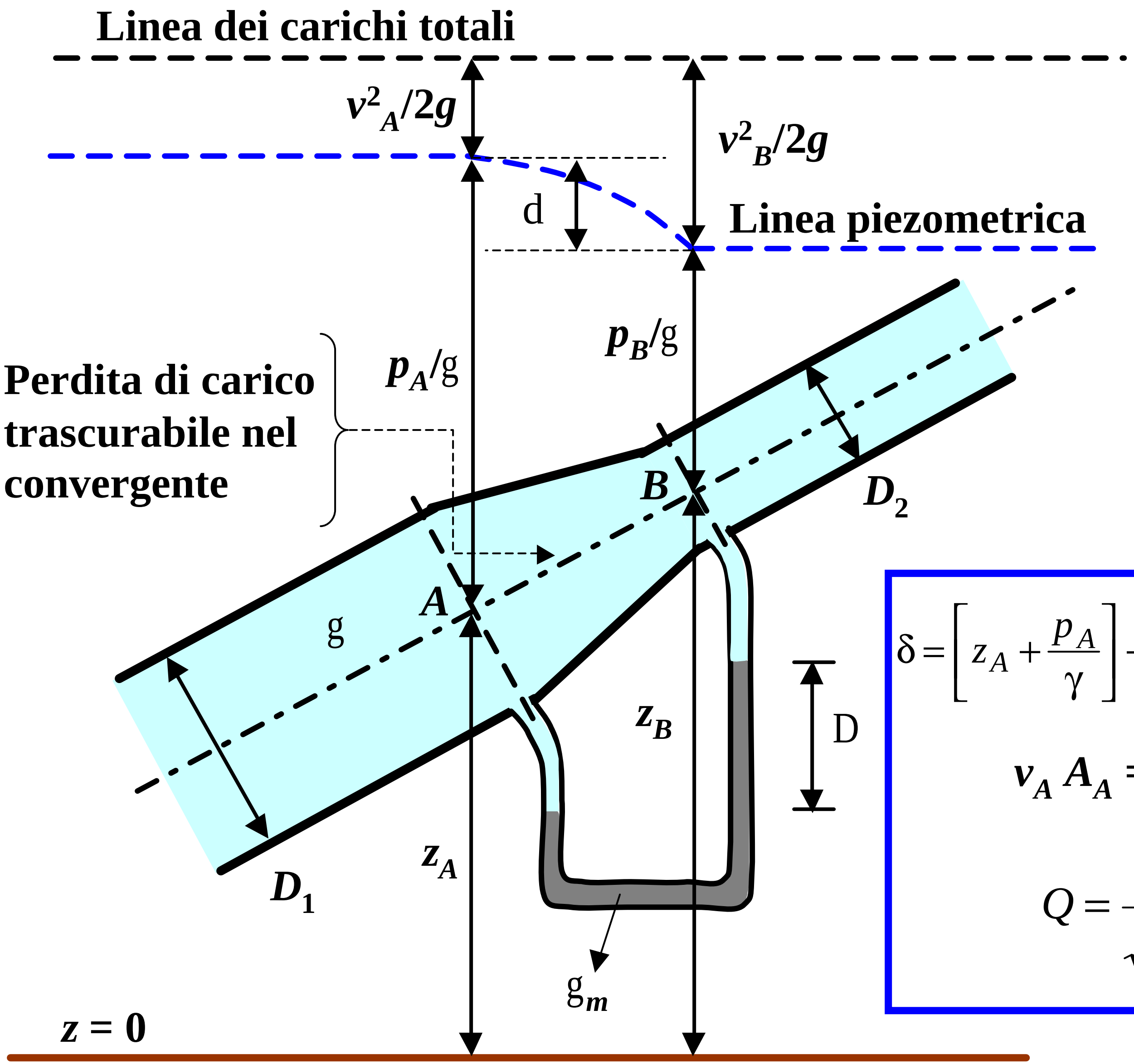
H_{medio} = energia specifica media





Per una corrente lineare di fluido ideale:
$\left\{ \begin{array}{l} P = \text{costante} \\ Q = \text{costante} \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ $\boxed{H_{medio} = \text{costante}}$

Venturimetro

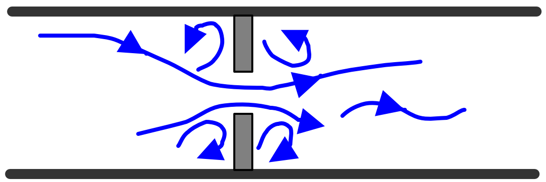


1. **Teorema di Bernoulli esteso a corrente lineare con a » 1 (v_{media} » v)**
2. **Corrente lineare Þ piezometrica unica, convenzionalmente riferita all'asse, L.C.T. unica**

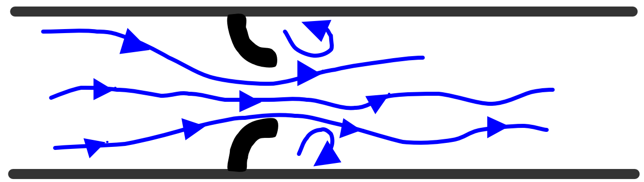
$$\delta = \left[z_A + \frac{p_A}{\gamma} \right] - \left[z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right] = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

$$v_A A_A = v_B A_B = Q = \text{costante}$$

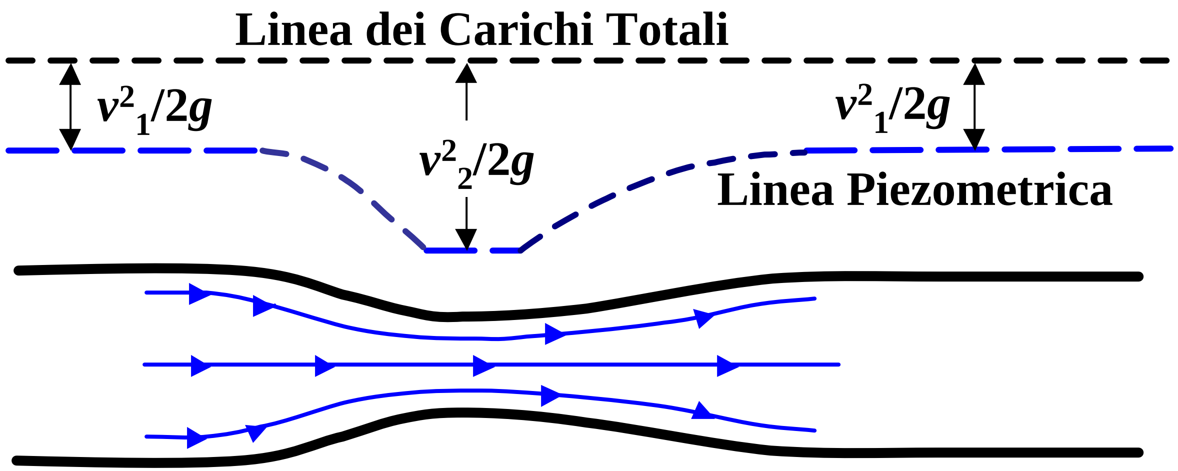
$$Q = \frac{A_A A_B}{\sqrt{A_A^2 - A_B^2}} \sqrt{2 g \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}}$$



Diaframma



Boccaglio



Venturimetro

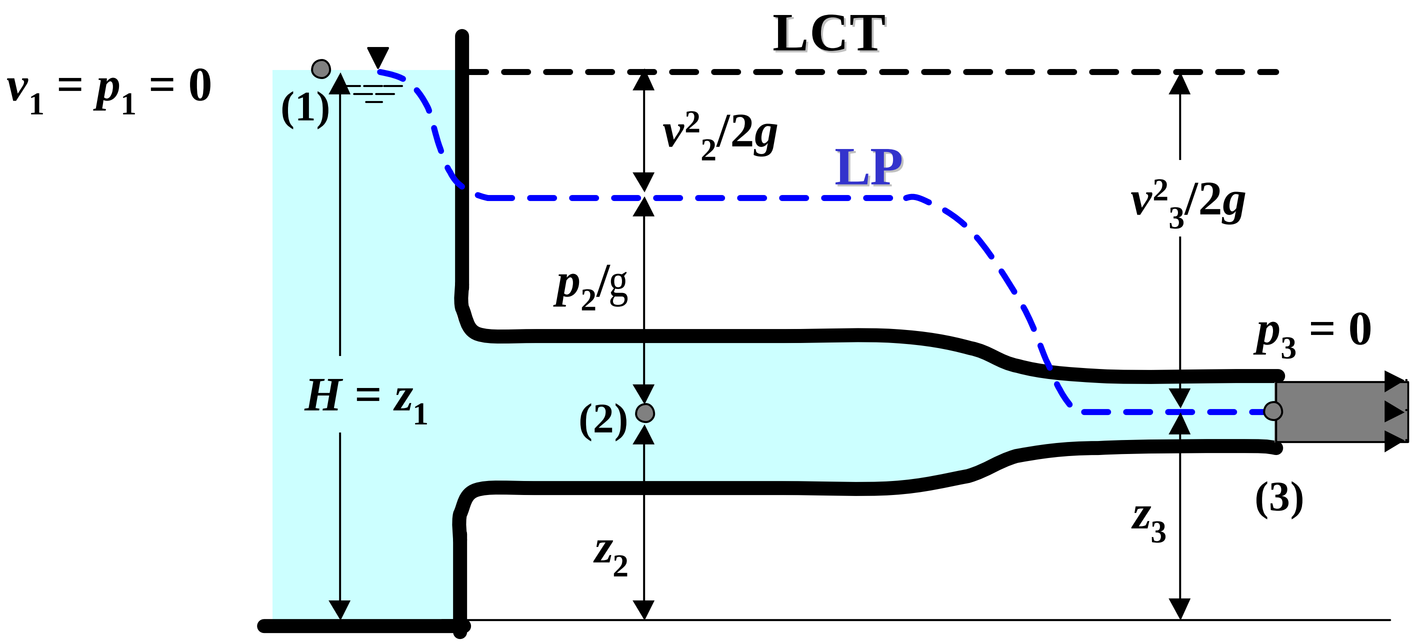
Taratura (laboratorio)

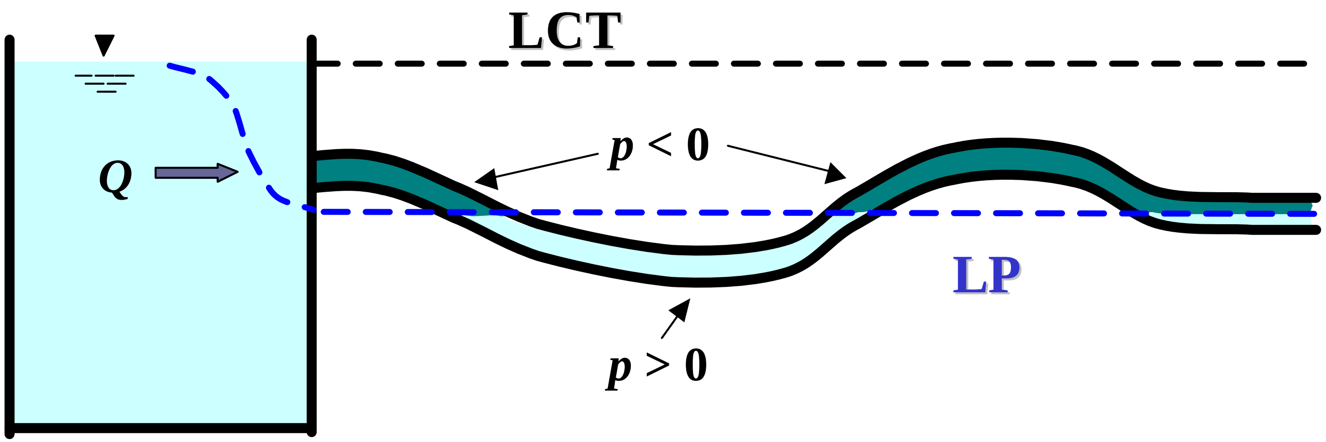
$$Q = K\,\sqrt{\Delta}$$

D: lettura manometro differenziale tra monte e valle

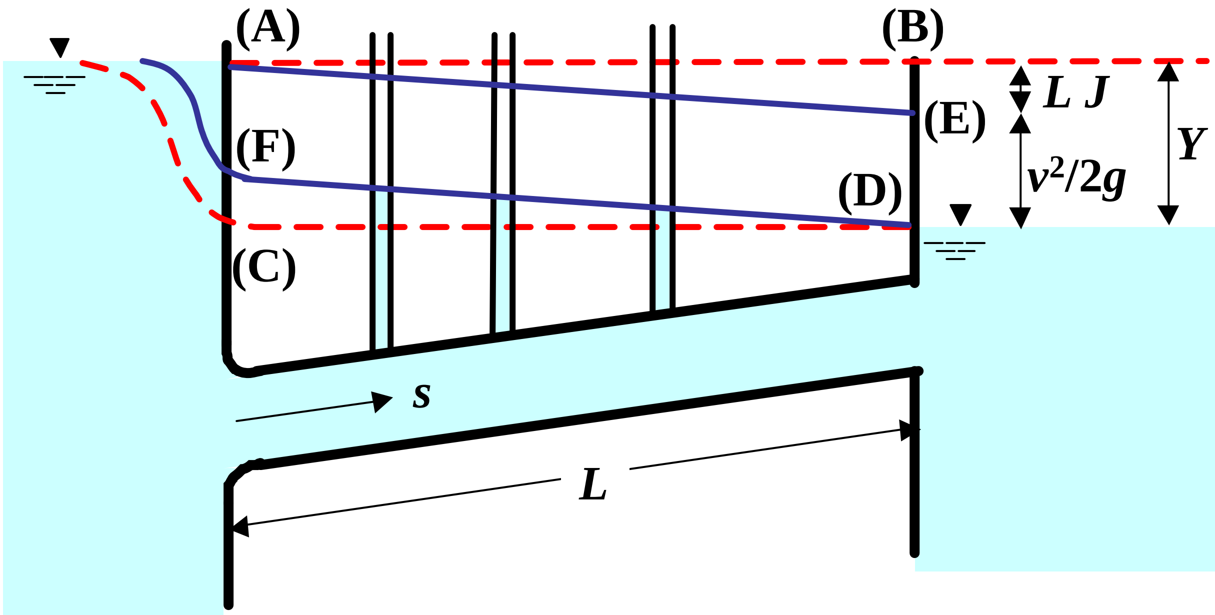
N.B.: In generale, un aumento di velocità è accompagnato da una diminuzione di pressione (cavitazione)

Linea piezometrica e linea dei carichi totali





Fluidi reali



H ¹ costante

Viscosità

ß

Sforzi tangenziali

ß

calore

Fluido ideale (velocità in condotta costante per tutte le traiettorie)

LCT: (AB)

LP : (CD)

Fluido reale (dissipazioni di energia meccanica)

LCT: (AE) = LP + $v^2/2g$

LP : (FD)

CADENTE $J = -\partial H/\partial s$

Perdita di energia per unità di peso e di persorso, adimensionale

Cadente Piezometrica $J = -\partial/\partial s\ (z + p/g)$

$$J = -\frac{\partial H}{\partial s}$$ **Equazione del moto**

$$\int_0^s dH = -\int_0^s J(s)\, ds \Longrightarrow H(s) - H_0 = -\int_0^s J(s)\, ds$$

Moto uniforme

J **= costante (LP ° LCT)**

$$\boldsymbol{H(s) - H_0 = -J \text{ ´ } s}$$

$$\Downarrow$$

$$Y = J\ L + \frac{v^2}{2g}$$

L'intera energia disponibile si trasforma solo in parte in energia cinetica a causa delle dissipazioni

Continue

J L

Perdite di carico

Localizzate

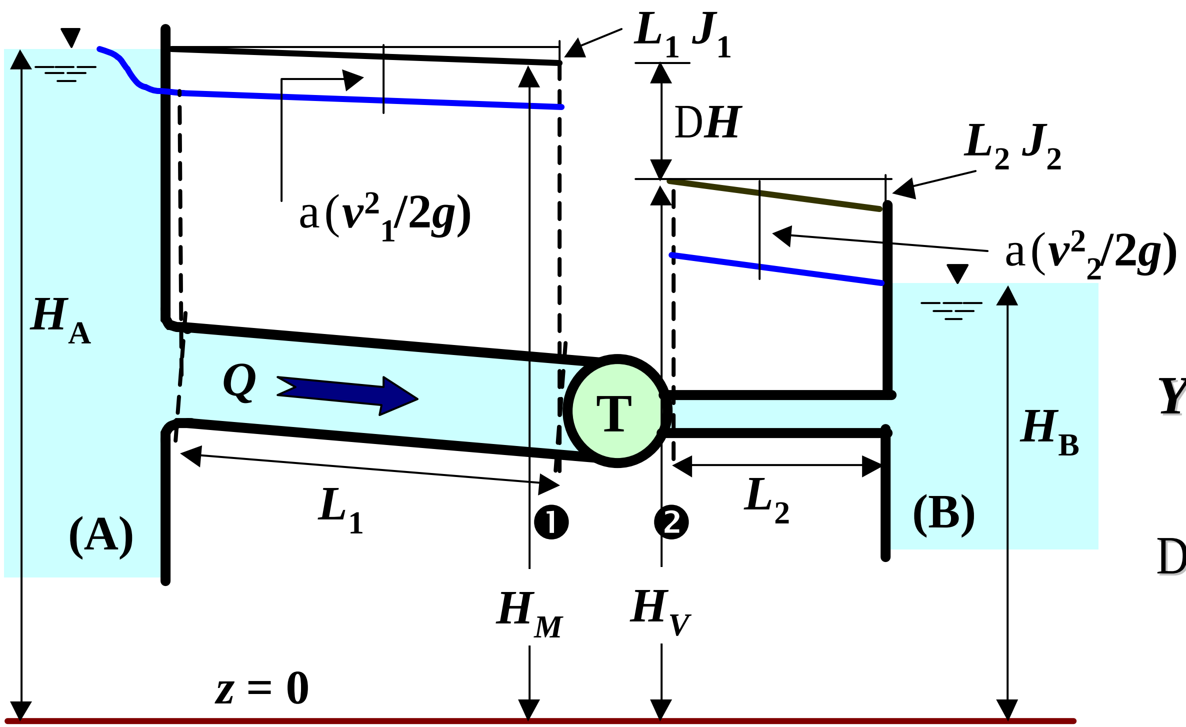
l

(proporzionali a $v^2 / 2g$)

$$\Downarrow$$

Equazione del moto

$$H(s) = H_0 - \int_0^s J(s)\, ds - \sum_i \lambda_i$$



La portata Q non dipende solo da Y ma anche dalla regolazione della macchina

Y = salto disponibile dislivello peli liberi

DH = salto utile = $H_M - H_V$

$H_M = H_A - J_1 L_1$

$H_V = H_B +$ a$(v^2{}_2/2g) + J_2 L_2$

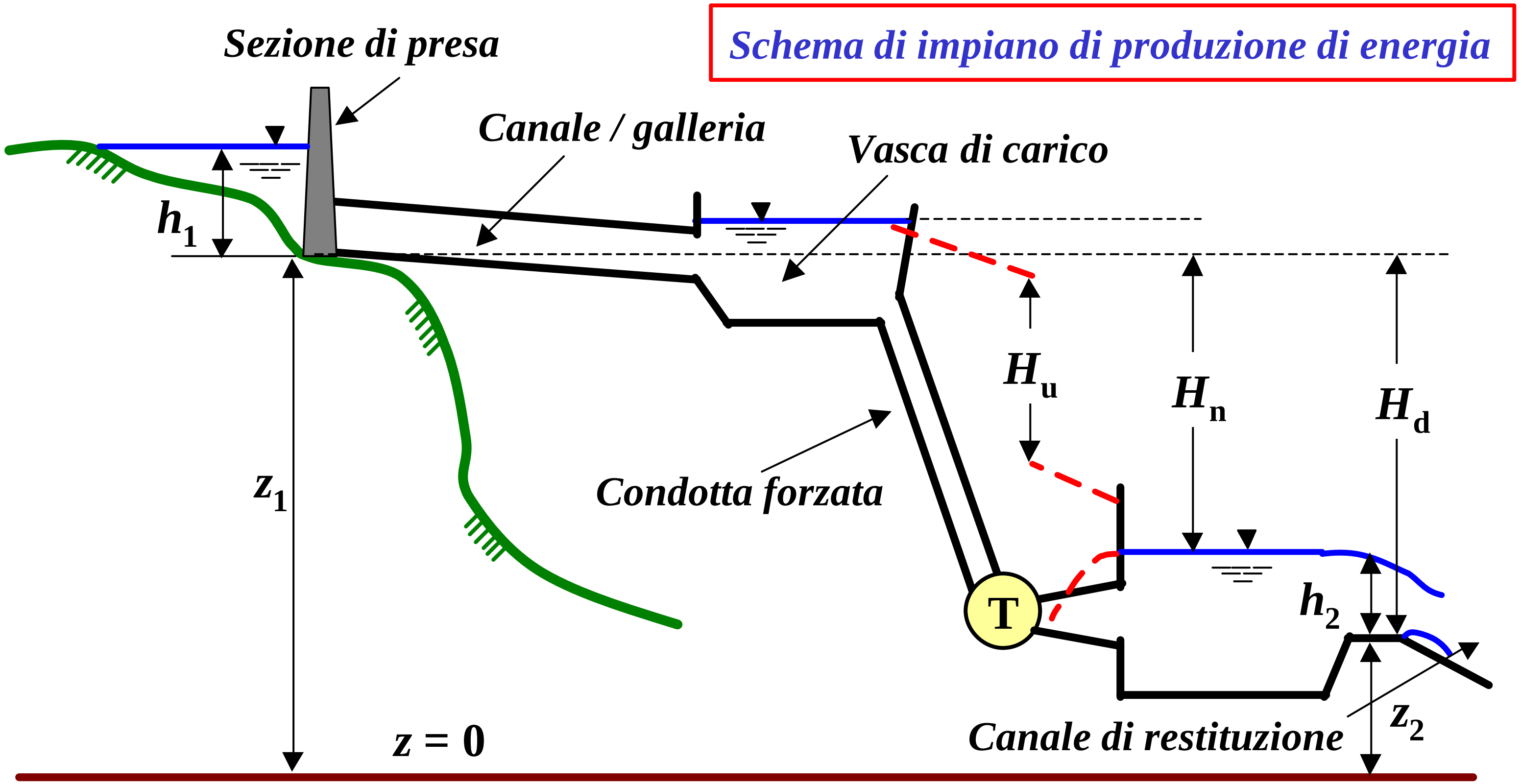
$P_t =$ g Q DH potenza ceduta

$P_d =$ g Q Y potenza disponibile

Energia ceduta dalla corrente alla macchina nell'unità di tempo

P_t = g Q DH **potenza teorica** (nel S.I.: P_t = (g Q DH) / 1000 [KW])

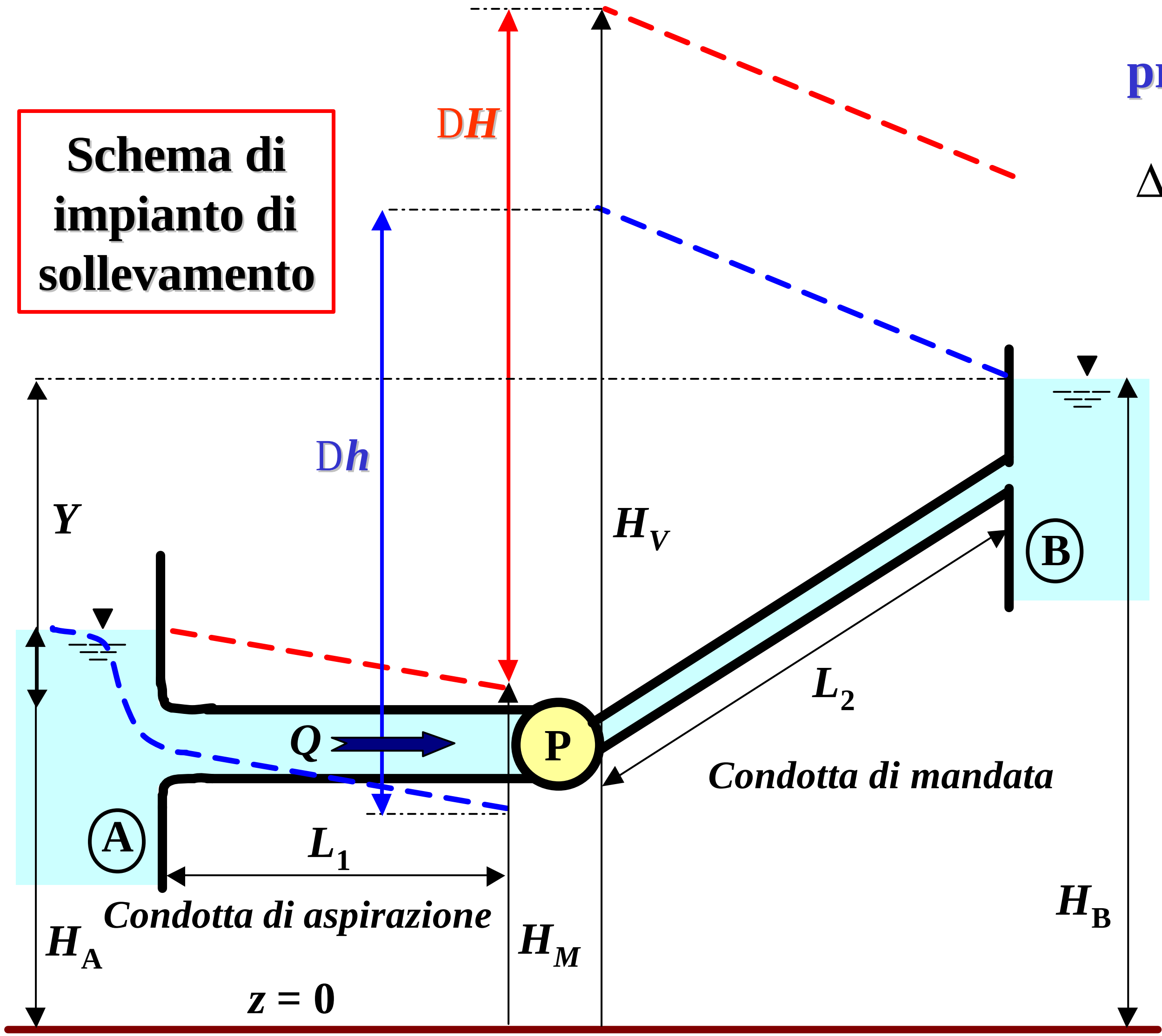
P_e = h g Q DH **potenza ritraibile dalla turbina (rendimento** h **= 0.8 – 0.9)**



In genere trascuro $h_1 - h_2$, $v^2_1/2g - v^2_2/2g$ ⇨ $H_d = z_1 - z_2$ **(Carico disponibile)**

H_u = *carico utile*; H_n = *salto nominale* ⇨ P_n = g Q H_n **potenza nominale**

Schema di impianto di sollevamento



prevalenza manometrica

$$\Delta h = \left[z_2 + \frac{p_2}{\lambda}\right] - \left[z_1 + \frac{p_1}{\lambda}\right]$$

prevalenza totale

$$\Delta H = H_V - H_M$$

prevalenza geodetica

Y

Potenza ceduta al fluido

$$P_t = \gamma\, Q\, \Delta H$$

Potenza ceduta alla pompa

$$P_e = (\gamma\, Q\, \Delta H) / \eta$$

Y **= 0 circuito chiuso** ⇨ **(la pompa deve vincere solo le resistenze distribuite/concentrate)**

Y **< 0 voglio convogliare più portata di quella che passerebbenaturalmente**

Effetti della comprimibilità del fluido

Flusso isotermo (stazionario) di un gas ideale - Equazione di stato: *p* = r *RT*

Lungo una linea di corrente $\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + g\ z = C \quad \Longrightarrow \quad RT \int \frac{dp}{p} + \frac{1}{2} V^2 + g\ z = C$

$$\boxed{\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{RT}{g} \ln\left[\frac{p_1}{p_2}\right] = \frac{V_2^2}{2g} + z_2}$$

V_1, z_1, p_1, noti in una qualche posizione sulla linea di corrente

Nel limite per piccole differenze di pressione, $p_1 / p_2 = 1 + (p_1 - p_2) / p_2 = 1 +$ e (e <<1)

Si ritrova la classica equazione di Bernoulli; [ln(1+ e)] » e

Trasformazione adiabatica di un gas perfetto: $p / p^k = C_0$

Lungo una linea di corrente $\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + g\ z = C \Rightarrow C_0^{1/k} \int p^{-1/k}\ dp + \frac{1}{2} V^2 + g\ z = C$

Si integra la pressione fra i punti 1 e 2 sulla linea di corrente

$$C_0^{1/k} \int_{p_1}^{p_2} p^{-1/k}\ dp = C_0^{1/k} \left[\frac{k}{k-1} \right] \left[p_2^{(k-1)/k} - p_1^{(k-1)/k} \right] =$$

$$= \left[\frac{k}{k-1} \right] \left[\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right]$$

$$\boxed{\left[\frac{k}{k-1} \right] \frac{p_1}{r_1} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 = \left[\frac{k}{k-1} \right] \frac{p_2}{r_2} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2}$$

Nel limite per *basse velocità* questa equazione coincide con la classica equazione di Bernoulli per un gas perfetto, incomprimibile

Riscrivo nella forma adimensionale con $z_1 = z_2 = 0$; $V_2 = 0$

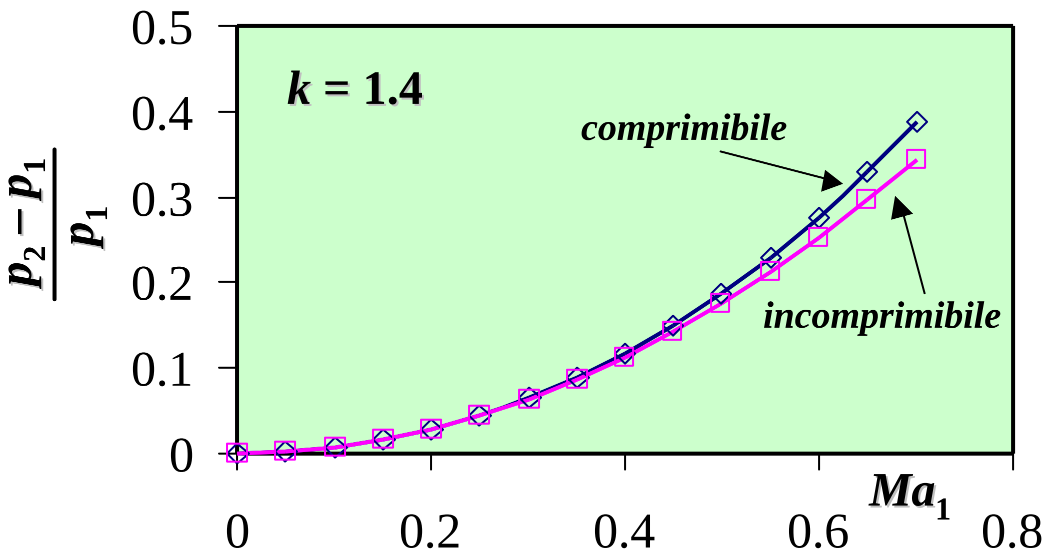
Ma_1
- Numero di MACH
- $Ma_1 = V_1 / c_1$; c_1 = velocità del suono $= \sqrt{kRT_1}$

$$\boxed{\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \left[\left(1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2\right)^{k/(k-1)} - 1\right]}$$

Dividiamo ciascun termine nell'equazione di Bernoulli (con $z_1 = z_2 = 0$; $V_2 = 0$) per p_1 e utilizziamo la legge dei gas perfetti, p_1 = r RT_1

$$\rho \frac{V_1^2}{2} + p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1^2}{2RT_1} + 1 \Rightarrow \boxed{\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{k\,Ma_1^2}{2}}$$

(**essendo** $Ma_1 = \dfrac{V_1}{\sqrt{kRT_1}}$)



Ma **< 0.3 il fluido può essere considerato incomprimibile**

T **» 15 ºC; c_1 » 340 m/s = 1224 km/h**

$V_1 = c_1\,Ma$ = 0.3 ´ 340 = 102 m/s » 368 km/h