Prof. Alberto Guadagnini

Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento (DIIAR)

Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci, 32, 20133 Milano- Italy

STATICA DEI FLUIDI

Note del Corso di *Meccanica dei Fluidi*

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica - Facoltà di Milano Bovisa

A.A. 2001 / 2002

Statica dei fluidi

- ⇒ Sforzi interni nei fluidi in quiete
- ⇒ Eq. indefinita della della statica
- ⇒ Distribuzione idrostatica delle pressioni
- ⇒ Pressioni relative ed assolute – Piano dei carichi idrostatici
- ⇒ Misura della pressione
- ⇒ Spinta idrostatica su una superfici piane
- ⇒ Spinta idrostatica su una superfici gobbe
- ⇒ Equazione globale dell'equilibrio statico
- ⇒ Fluidi di piccolo peso specifico
- ⇒ Equilibrio relativo

Per lo studio della meccanica dei sistemi continui abbiamo due tipi di approcci

locale $\Rightarrow$ **Equazione indefinita :** *relazione fra grandezze caratteristiche del moto o dell'equilibrio con valore puntuale*

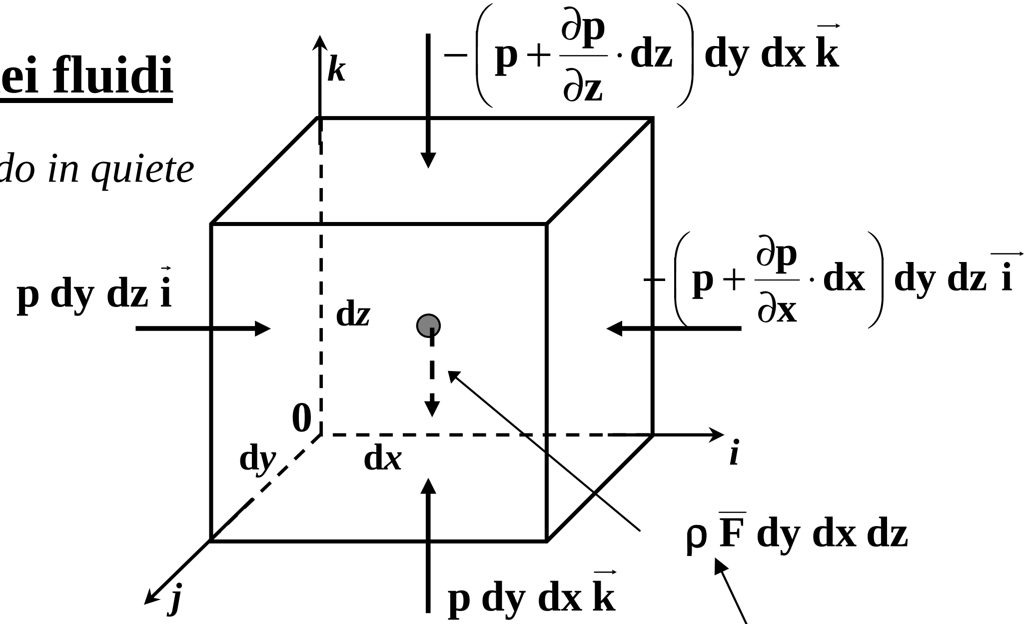
globale $\Rightarrow$ **Equazione globale :** *relazione fra grandezze riferite ad un volume finito*

Eq. indefinita della statica dei fluidi

consideriamo un volumetto infinitesimo di fluido in quiete dove con ρ *e p indichiamo densità e pressione*

$\Rightarrow$ forze di massa $\quad \rho\, \overline{\mathbf{F}}\, \mathbf{dy\, dx\, dz}$

$\Rightarrow$ forze di superficie
$$-\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{dx\, dy\, dz}\, \vec{\mathbf{i}}$$
$$-\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{dx\, dy\, dz}\, \vec{\mathbf{j}}$$
$$-\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \cdot \mathbf{dx\, dy\, dz}\, \vec{\mathbf{k}}$$



forza di massa per unità di massa

$$\boxed{\sum \overline{F_m} + \sum \overline{F_s} = 0}$$

$$\rho\, \overline{F}\, dx\, dy\, dz = +\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot dx\, dy\, dz = +grad(p) \cdot dx\, dy\, dz$$

$$\boxed{\rho\, \overline{\mathbf{F}} = \mathbf{grad}(\mathbf{p})}$$

Equazione indefinita della statica dei fluidi

$$\rho\,\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{grad}(\mathbf{p})$$

$\overline{\mathbf{F}}$ = *è una forza di massa per unità di massa* $\Rightarrow$ *un'accelerazione*

➤ *La legge di distribuzione delle pressioni nel fluido in quiete è determinata dalla soluzione del sistema:*

1. Equazione indefinita $\rho\,\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{grad}(\mathbf{p})$

- Equazione di stato $\rho = \rho(p, \textit{temperatura})$
- Condizioni al contorno forniscono la soluzione particolare

FLUIDO PESANTE INCOMPRIMIBILE

$$\rho\,\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{grad}(\mathbf{p})$$

<u>*Fluido pesante*</u> $\overline{\mathbf{F}} = -\mathbf{g}\ \mathbf{grad}\ \mathbf{z}$

<u>*Fluido incomprimibile*</u> $\rho = \textbf{costante}$

$$\mathbf{grad}\left(\mathbf{z} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma}\right) = \mathbf{0}$$

$z + p/\gamma$ = **costante**

LEGGE DI STEVIN

Eq. indefinita dei fluidi pesanti ed incomprimibili

DEF.

z + p / γ = quota piezometrica

altezza piezometrica

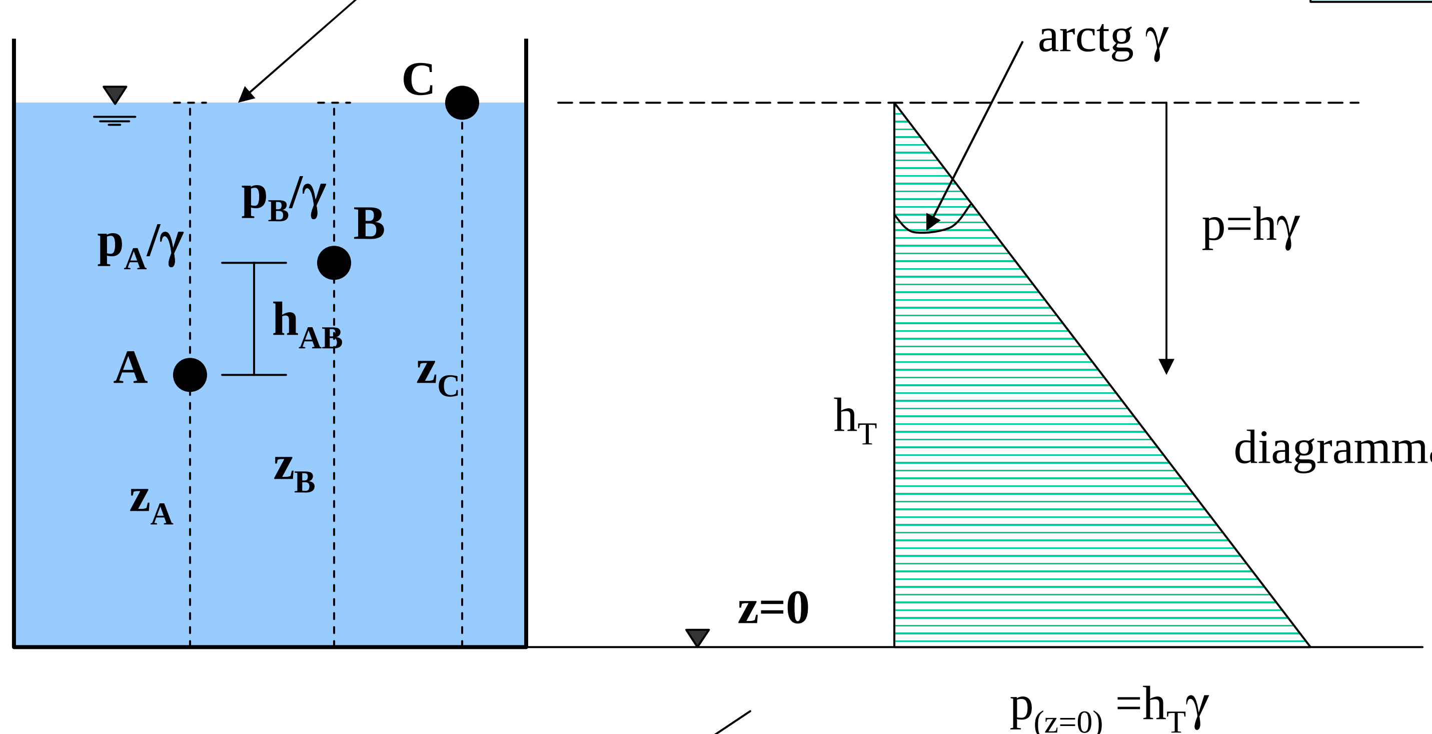
quota geodetica *(rispetto ad un arbitrario piano di riferimento orizzontale)*

Distribuzione *idrostatica* delle pressioni

LEGGE DI STEVIN

$$\boldsymbol{z + p/\gamma = \text{costante}}$$

superficie libera ; *si assume come riferimento* $\mathbf{p_{atm}=0}$

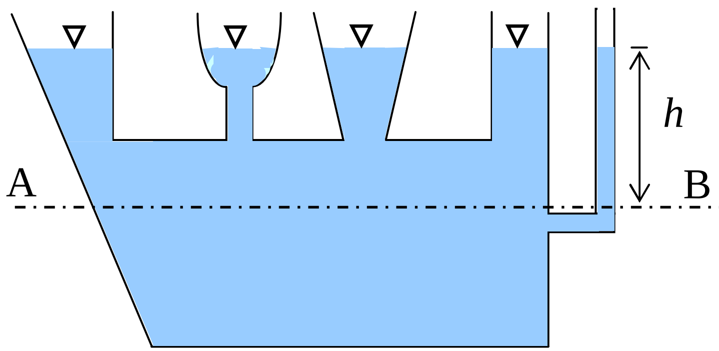


$$z_A + p_A/\gamma = z_B + p_B/\gamma = z_C + \cancel{p_C/\gamma} = \text{cost.}$$

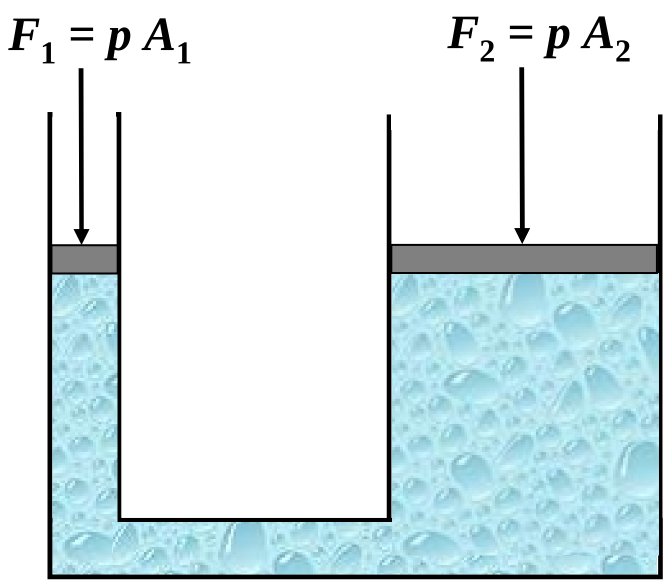
$$p_A = \gamma\, h_{AB} + p_B$$

Se p = *costante (superfici isobariche)* ⇒ **z** = *costante* ⇒

Le superfici isobariche sono dei piani orizzontali



La pressione in un punto non dipende dalla forma del recipiente che contiene il fluido



Trasmissione della pressione fluida.

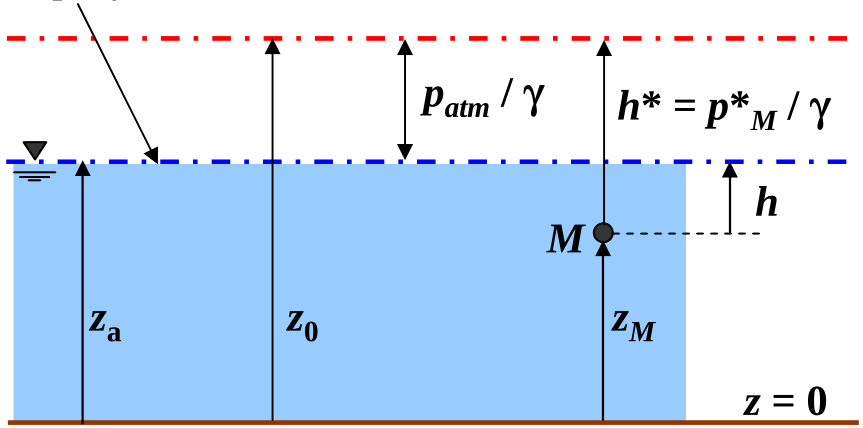
Una piccola forza può originare una forza più grande

Pressioni relative ed assolute – Piano dei carichi idrostatici

- $z + p / \gamma =$ **costante;** *come condizione al contorno si è soliti scegliere la pressione atmosferica.*

- $p_{\text{relativa}} + p_{\text{atmosferica}} = p_{\text{assoluta}} = p^*$ ⟶ *la* p_{relativa} *può anche essere negativa;*

  la p_{assoluta} *è solo positiva!*



p.c.i. Assoluto; $z^* = z_M + p^*_M / \gamma$

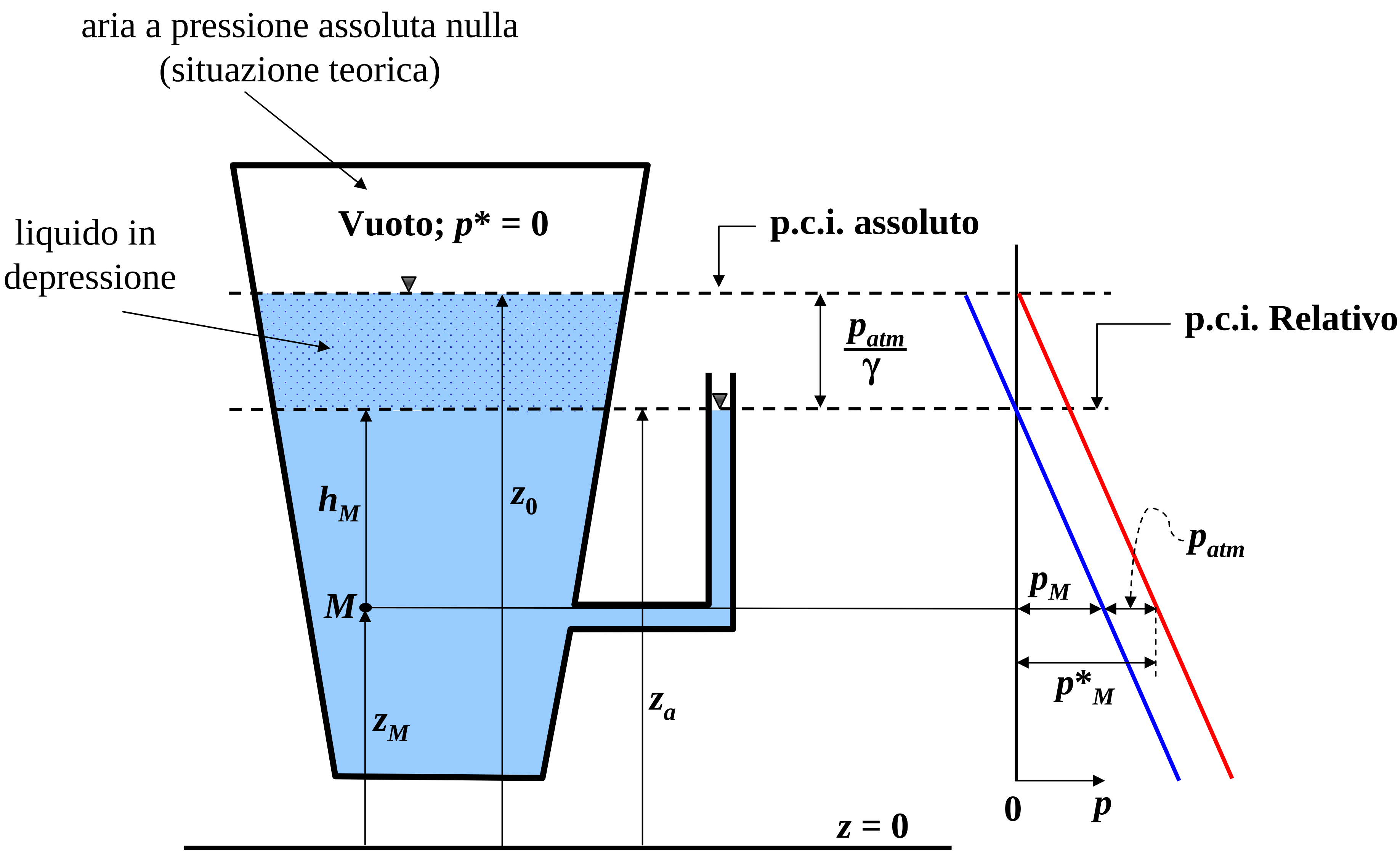
p.c.i. Relativo; $z_a = z_M + p_M / \gamma$

$$= z_M + (p^*_M - p_{atm}) / \gamma$$

Il p.c.i. relativo e assoluto sono utili per trovare la **p** *nei punti della massa fluida considerata*

$$p_M = \gamma\,(z_a - z_M) = \gamma\, h \qquad\qquad p^*_M = \gamma\,(z_0 - z_M) = \gamma\, h^*$$

$p_{atm} / \gamma \approx$ **10.33 m** *(altezza piezometrica della pressione atmosferica)*



aria a pressione assoluta nulla
(situazione teorica)
Vuoto; $p^* = 0$
liquido in
depressione
p.c.i. assoluto
p.c.i. Relativo
$\frac{p_{atm}}{\gamma}$
h_M
z_0
M
z_M
z_a
p_{atm}
p_M
p^*_M
$z = 0$
0
p

FLUIDI COMPRIMIBILI

- ✓ **Nei gas ρ = ρ(*p*, temperatura)**
- ✓ **ρ dei gas più comuni << di ρ dei liquidi ⇒ il gradiente verticale di pressione può essere molto piccolo ⇒ la pressione si mantiene essenzialmente costante in un gas (ad esempio in serbatoi, tubazioni, … dove le distanze coinvolte sono piccole)**
- ✓ **Quando le variazioni in quota sono sensibili si deve tener conto della comprimibilità del gas Esempio: GAS IDEALE**

Equazione di stato

$$p = \rho R T$$

Variazione di *p*

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{gp}{RT}$$

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \ln \frac{p_1}{p_2} = -\frac{g}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T}$$

In genere è necessaria $T = T(z)$

Gas isotermo; $T = T_0$

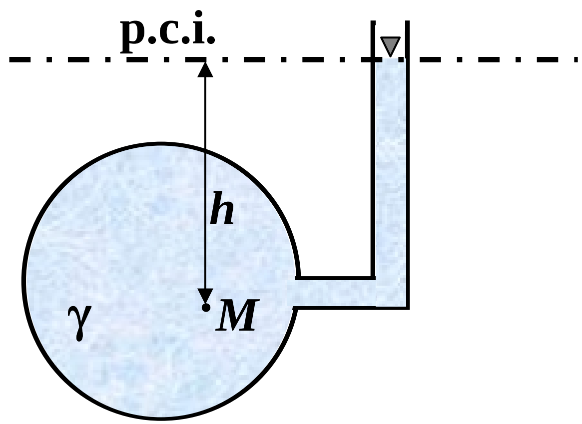
$$p_2 = p_1 \exp\left[-\frac{g\,(z_2 - z_1)}{R\,T_0} \right]$$

***P*: pressione assoluta**

***R*: costante del gas**

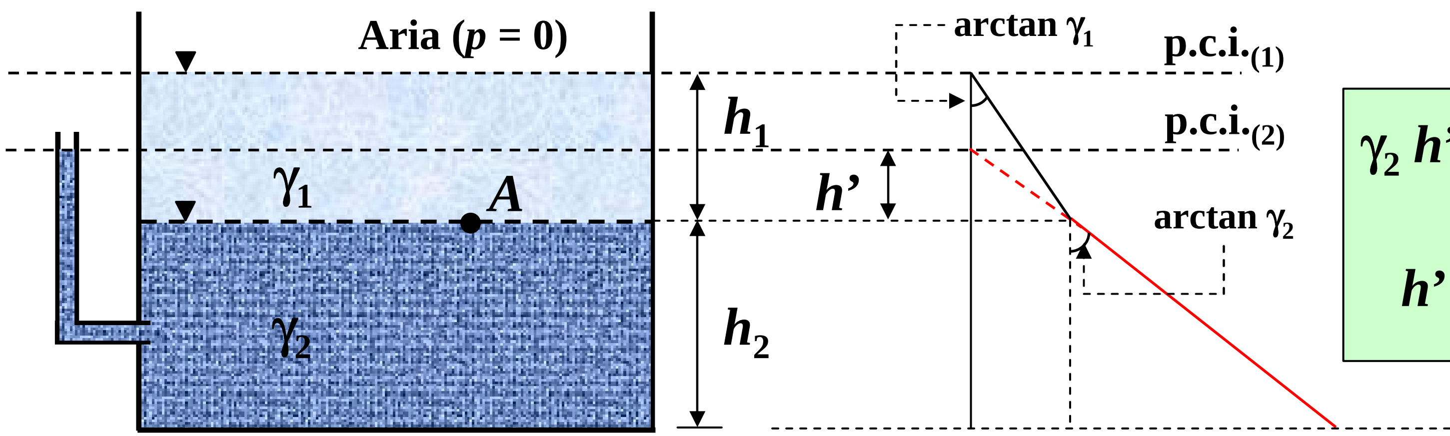
***T*: temperatura assoluta**

MISURA DELLA PRESSIONE



***Piezometro*: consente di visualizare la quota del p.c.i.**

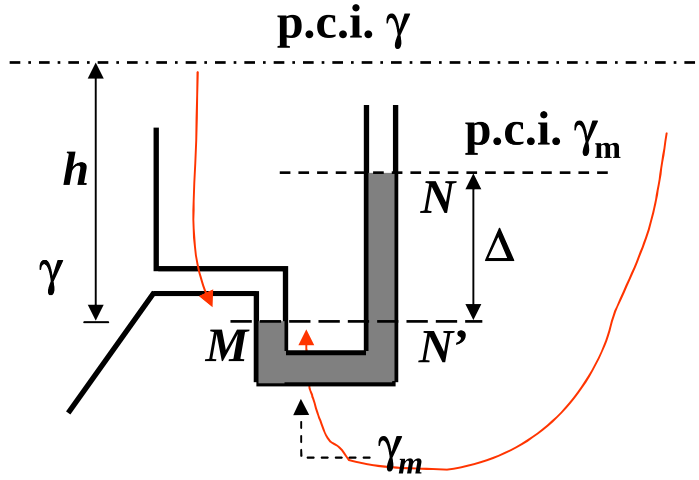
$$p_M = \gamma\, h$$



$$\gamma_2\, h' = p_A = \gamma_1\, h_1$$

$$h' = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\, h_1$$

Manometro Semplice

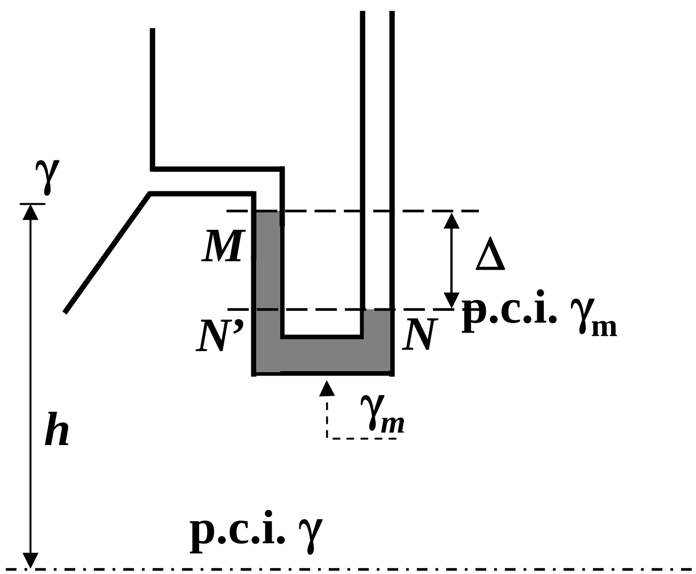


$\gamma_m > \gamma$

$$p_M = \cancel{p_N} + \gamma_m \Delta$$

$$p_M = h\,\gamma$$

$$\boxed{h = \Delta \frac{\gamma_m}{\gamma}}$$



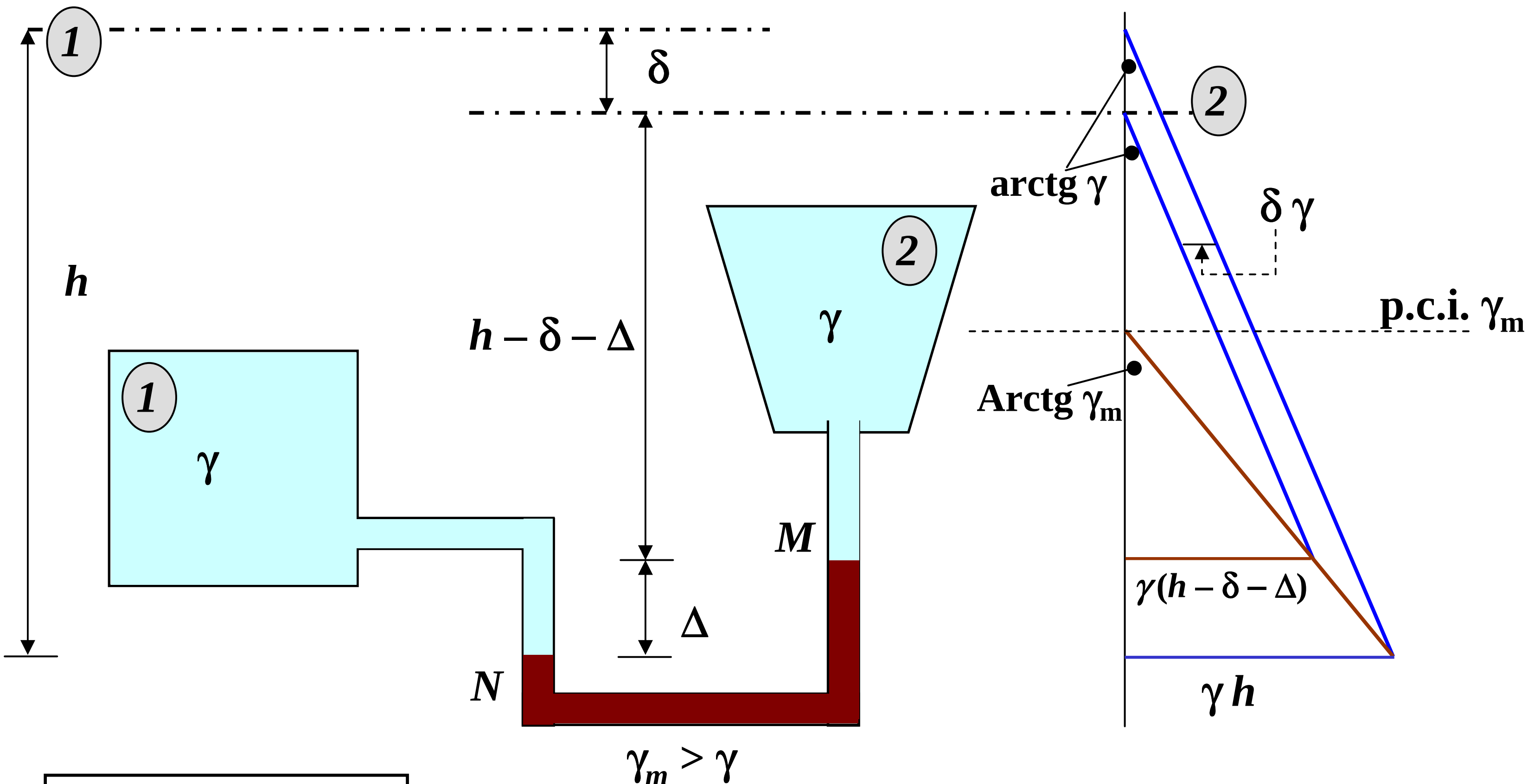
$\gamma_m > \gamma$

$$p_N = 0 = p_{N'}$$

$$p_M = -\gamma_m \Delta$$

$$\boxed{h = +\Delta \frac{\gamma_m}{\gamma}}$$

Manometro Differenziale 1/2



$p_N = \gamma\, h$

$p_M = \gamma\,(h - \Delta - \delta)$

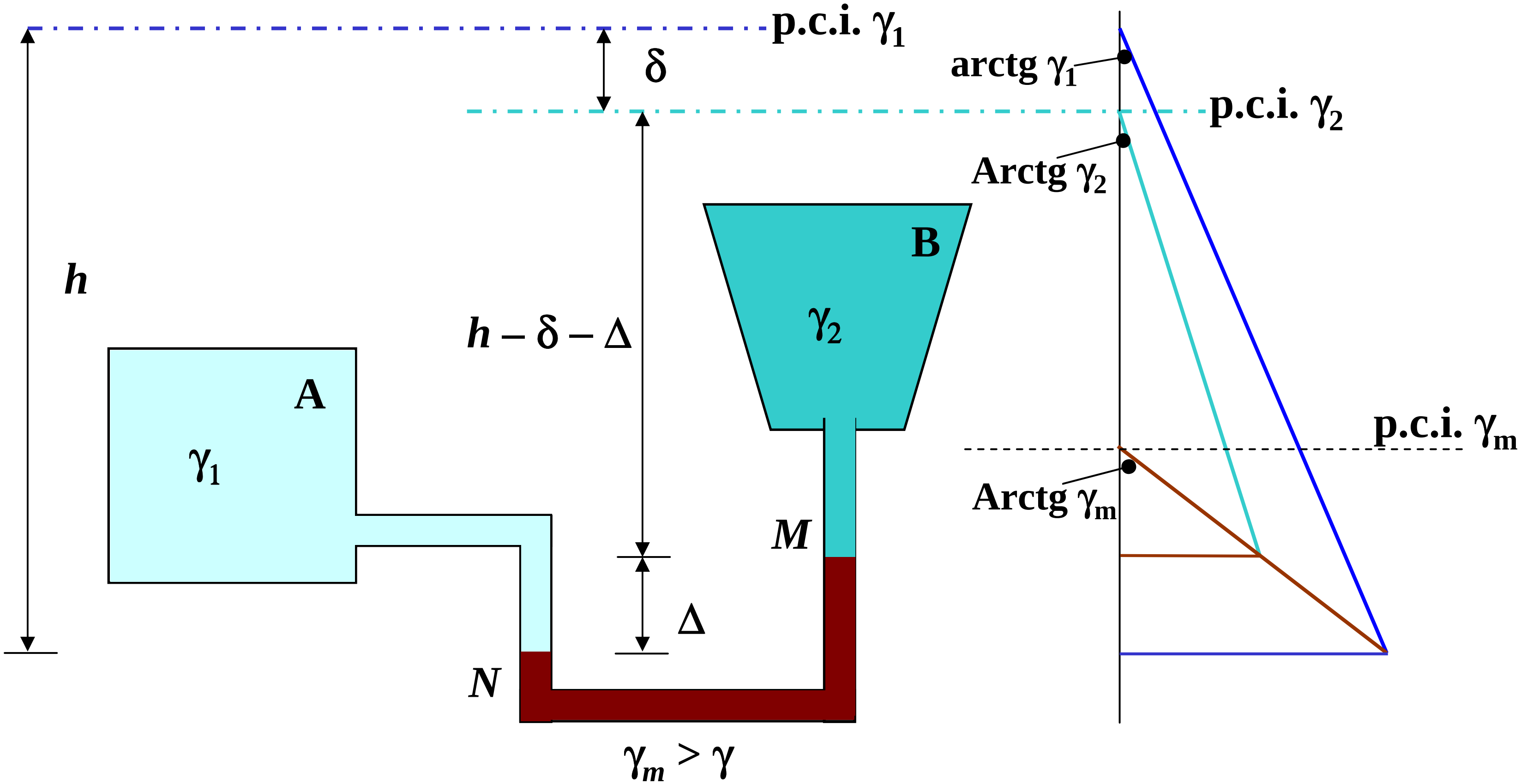
$p_N = p_M + \Delta\, \gamma_m$

$$\gamma\,(h - \Delta - \delta) + \Delta\, \gamma_m = \gamma\, h$$

$$\delta = \Delta\, \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

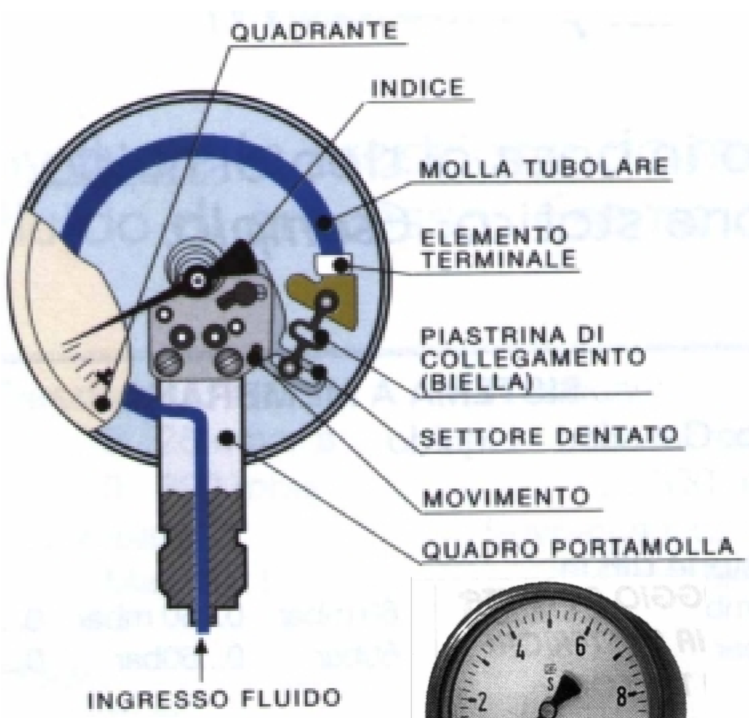
<u>*non dipende da h*</u>

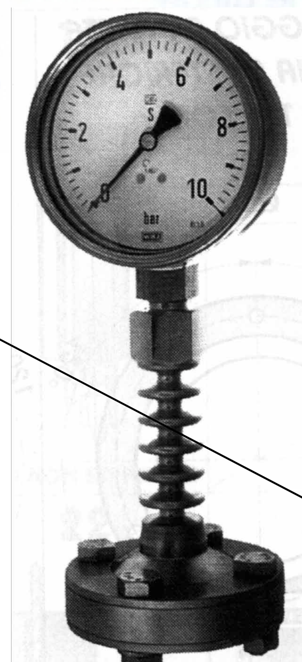
Manometro Differenziale 2/2

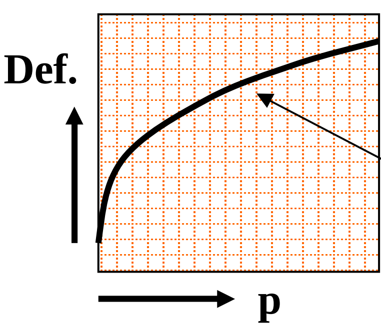


$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma_2}{\gamma_2} + h \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2}$$

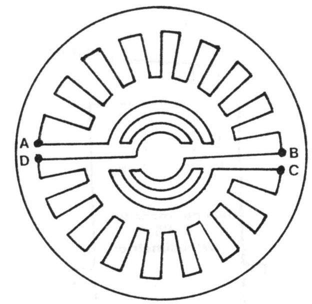
Manometro metallico

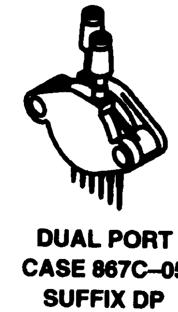


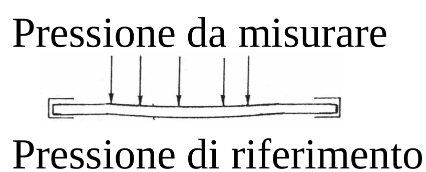


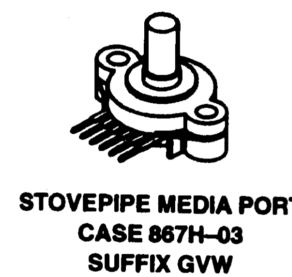


Cella di pressione

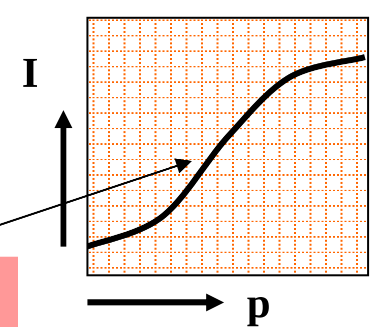






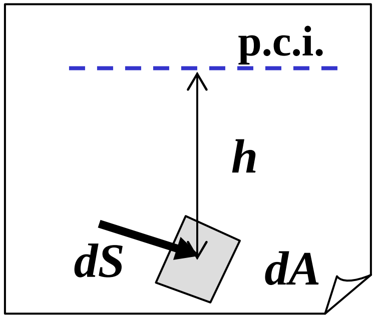


Trasduttore di Pressione*: *converte un segnale di pressione in un output in corrente o tensione



Funzione di trasferimento

Spinta Idrostatica su Superficie Piana



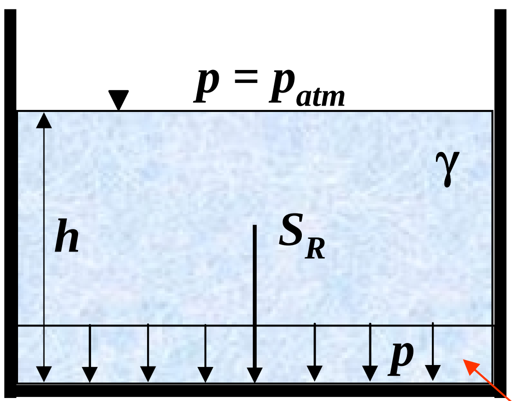
se si considera una <u>superficie infinitesima</u> la spinta idrostatica **dS** *é sempre diretta ⊥ alla sup. ma è indipendente dal suo orientamento*

$$d\underline{S} = p\,\underline{n}\,dA = \gamma\,h\,dA\,\underline{n}$$

l'orientamento della superficie conta per sup. finite perché cambia il diagramma di distribuzione delle pressioni

$$S_R = \int_A \gamma\,h\,dA$$

superficie orizzontale

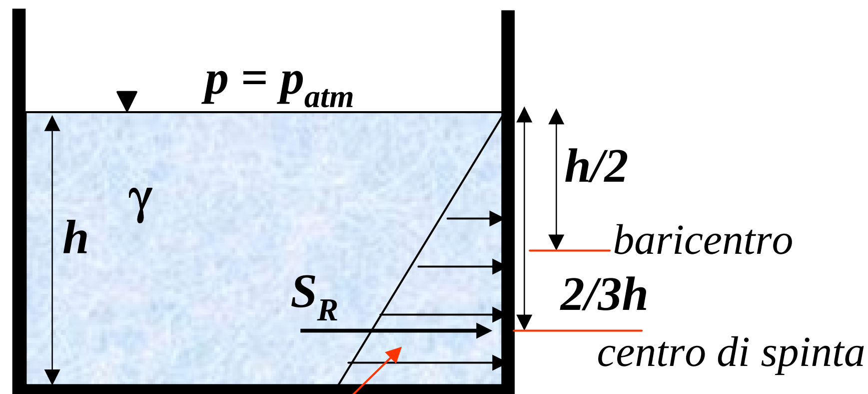


distribuzione uniforme di pressione

$S_R = p\,A$ con $p = \gamma\,h$

- ✓ *normale alla superficie*
- ✓ *punto di applicazione nel baricentro*

superficie verticale

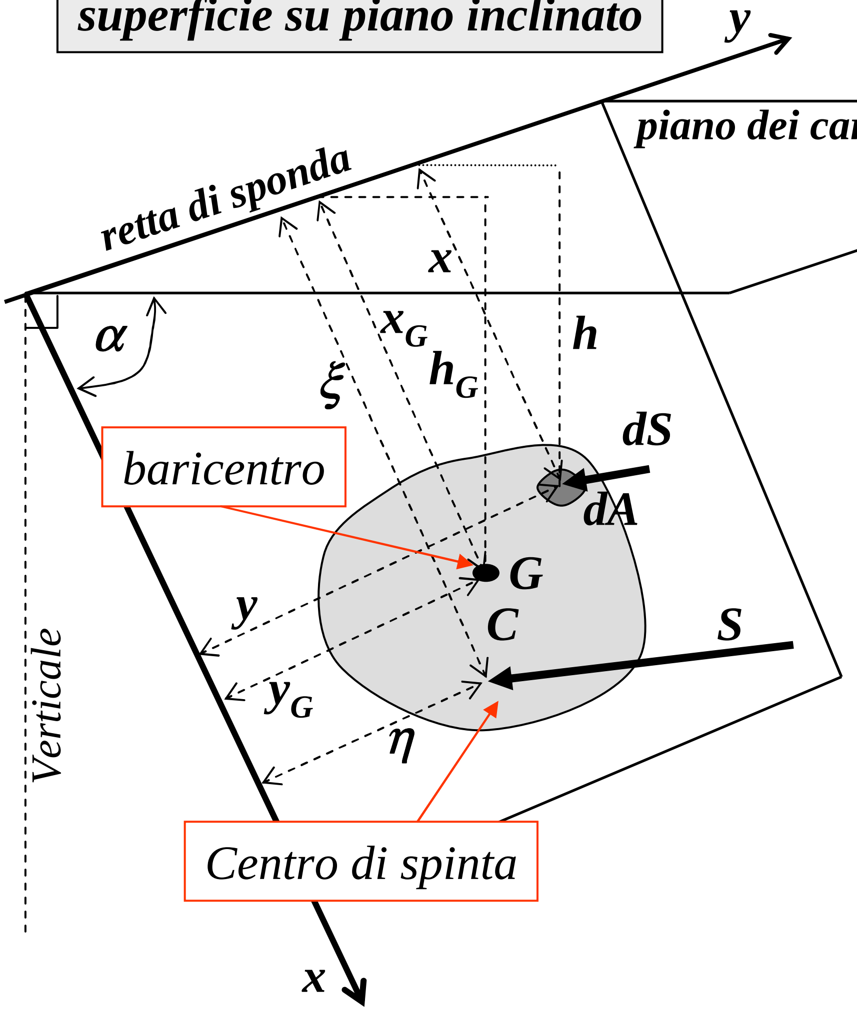


distribuzione triangolare di pressione

$S_R = p_G\,A$ con $p_G = \gamma\,h/2$

- ✓ *normale alla superficie*
- ✓ *punto di applicazione nel centro di spinta*

superficie su piano inclinato



$$d\overline{S} = p \cdot \overline{n} \cdot dA$$

$$\overline{S} = \int_A d\overline{S} = \int_A p \cdot \overline{n} \cdot dA = \overline{n} \cdot \int_A \gamma \cdot h \cdot dA$$

Modulo della spinta

$$S = \int_A \gamma \cdot x \cdot sen(\alpha) \cdot dA = \gamma \cdot sen(\alpha) \cdot \int_A x \cdot dA =$$

$$= \gamma \cdot sen(\alpha) \cdot x_G \cdot A = \gamma \cdot h_G \cdot A = p_G \cdot A$$

Centro di spinta: *devo definire le coordinate* ξ *e* η*;*
calcolo l'equilibrio dei momenti rispetto agli assi x e y

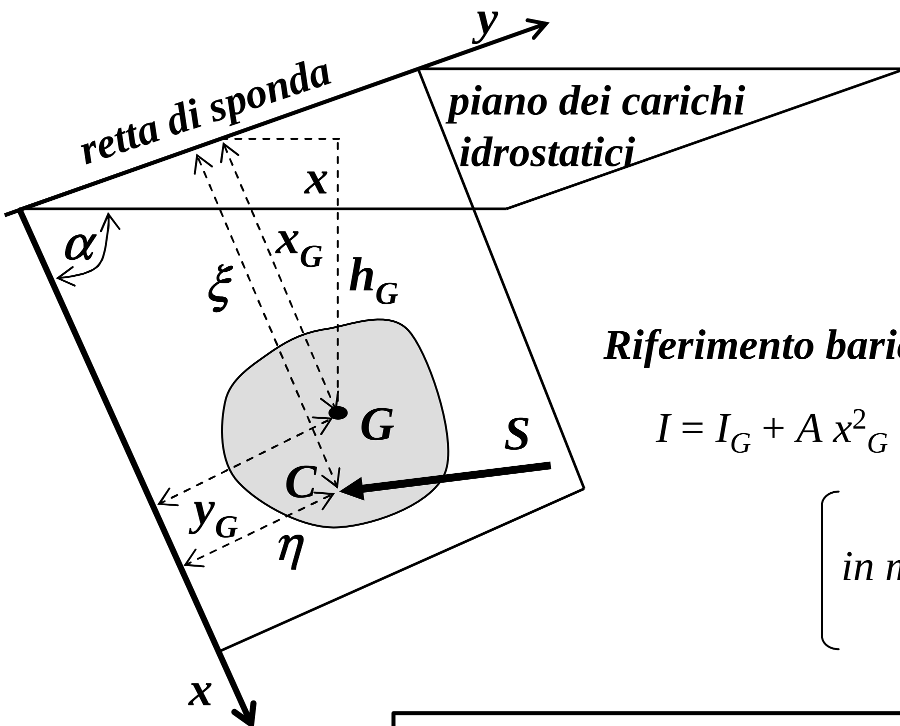
$$S \cdot \xi = \int_A p \cdot x \cdot dA = \int_A \gamma \cdot h \cdot x \cdot dA = \int_A \gamma \cdot sen(\alpha) \cdot x^2 \cdot dA$$

$$\xi = \frac{\gamma \cdot sen(\alpha) \cdot \int_A x^2 \cdot dA}{S} = \frac{\cancel{\gamma \cdot sen(\alpha)} \cdot \int_A x^2 \cdot dA}{\cancel{\gamma \cdot sen(\alpha)} \cdot \int_A x \cdot dA} = \frac{I}{M}$$

$$S \cdot \eta = \int_A p \cdot y \, dA = \int_A \gamma \cdot h \cdot y \, dA = \int_A \gamma \cdot sen(\alpha) \cdot x \cdot y \, dA$$

$$\eta = \frac{\gamma \cdot sen(\alpha) \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA}{S} = \frac{\cancel{\gamma \cdot sen(\alpha)} \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA}{\cancel{\gamma \cdot sen(\alpha)} \cdot \int_A x \cdot dA} = \frac{I_{xy}}{M}$$

$$\boxed{S = p_G \cdot A \qquad \xi = \frac{I}{M} \qquad \eta = \frac{I_{xy}}{M}}$$



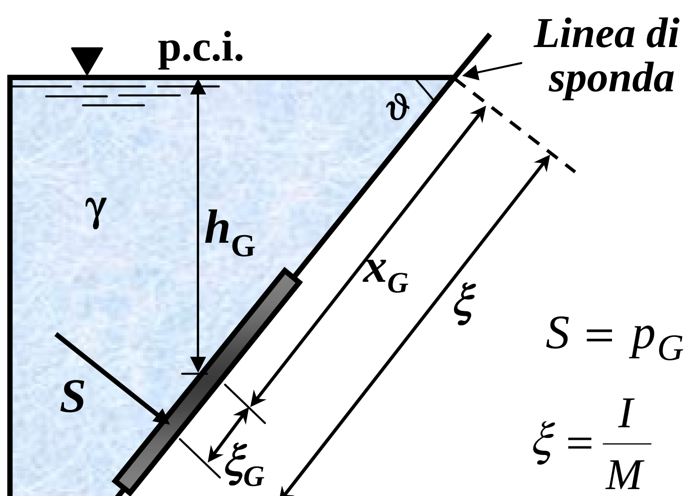
Note: - *la posizione di C non dipende da* α

- η *si annulla se l'asse* **x** (*di max pendenza del piano*) *è di simmetria per* **A** (*situazione tipica*)
- *C è sempre più distante del baricentro dalla retta di sponda.*

Riferimento baricentrico

$$I = I_G + A\,x^2_G \Rightarrow (\text{con } I_G / x_G A > 0) \qquad \xi = \frac{I_G}{M} + \frac{A \cdot x_G^2}{A \cdot x_G} = x_G + \frac{I_G}{M}$$

in maniera analoga $$\eta = \frac{I_{xyG}}{M} + \frac{A \cdot x_G \cdot y_G}{A \cdot x_G} = y_G + \frac{I_{xyG}}{M}$$



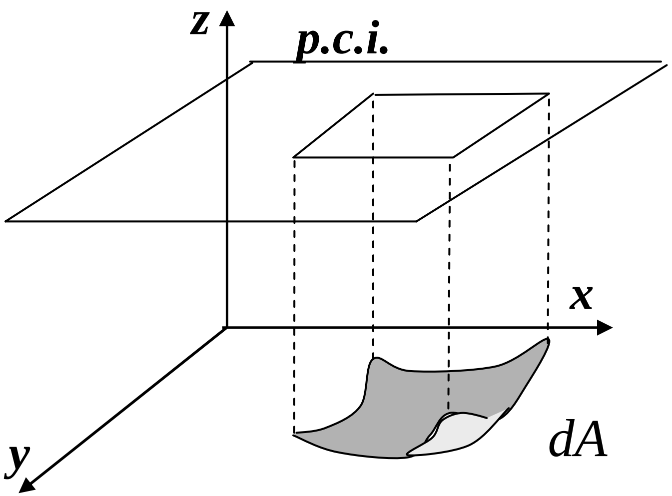
$$S = p_G \cdot A = \gamma \cdot h_G \cdot A$$

$$\xi = \frac{I}{M} \qquad \xi_G = \frac{I_G}{M}$$

$$\eta = \frac{I_{xy}}{M} = 0$$

Spinte su superfici gobbe 1/2

In genere non riconducibile ad un'unica forza (2 forze: 1 orizzontale, 1 verticale)

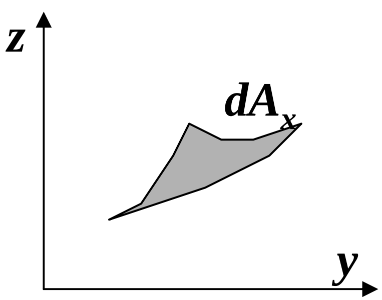


$$d\bar{S} = p \cdot \bar{n} \cdot dA$$

$$dS_X = p \cdot \left(\cos \widehat{nx} \cdot dA \right) = p \cdot dA_X$$

$$dS_Y = p \cdot \left(\cos \widehat{ny} \cdot dA \right) = p \cdot dA_Y$$

$$dS_Z = p \cdot \left(\cos \widehat{nz} \cdot dA \right) = p \cdot dA_Z$$



$$S_x = \int_{A_x} dS_x = \int_{A_x} p\, dA_x = \int_{A_x} \gamma h\, dA_x = \gamma h_{Gx} A_x$$

- **La superficie A_x è piana**
- **h_{Gx} è il baricentro di A_x piana**

$$S_y = \int_{A_y} dS_y = \int_{A_y} p\, dA_y = \int_{A_y} \gamma h\, dA_y = \gamma h_{Gy} A_y$$

⇒ **Proiezione A_x, A_y**

⇒ **$\gamma h_G = p_G$ baricentro**

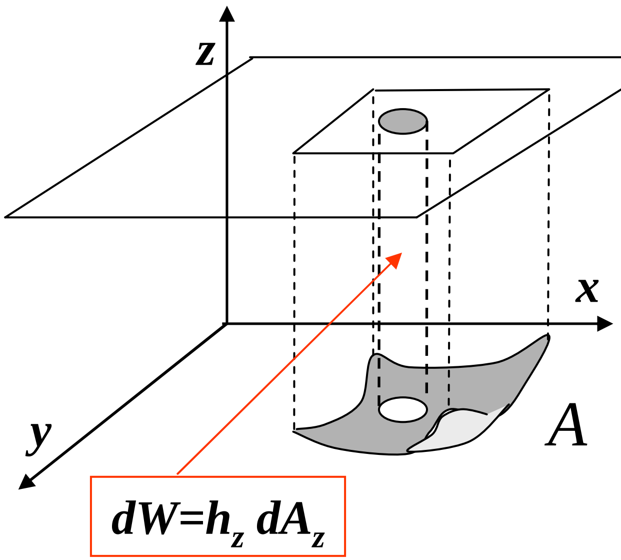
⇒ **Applicata (S_x, S_y) nel centro di spinta**

⇒ **In genere S_x, S_y non sono complanari**

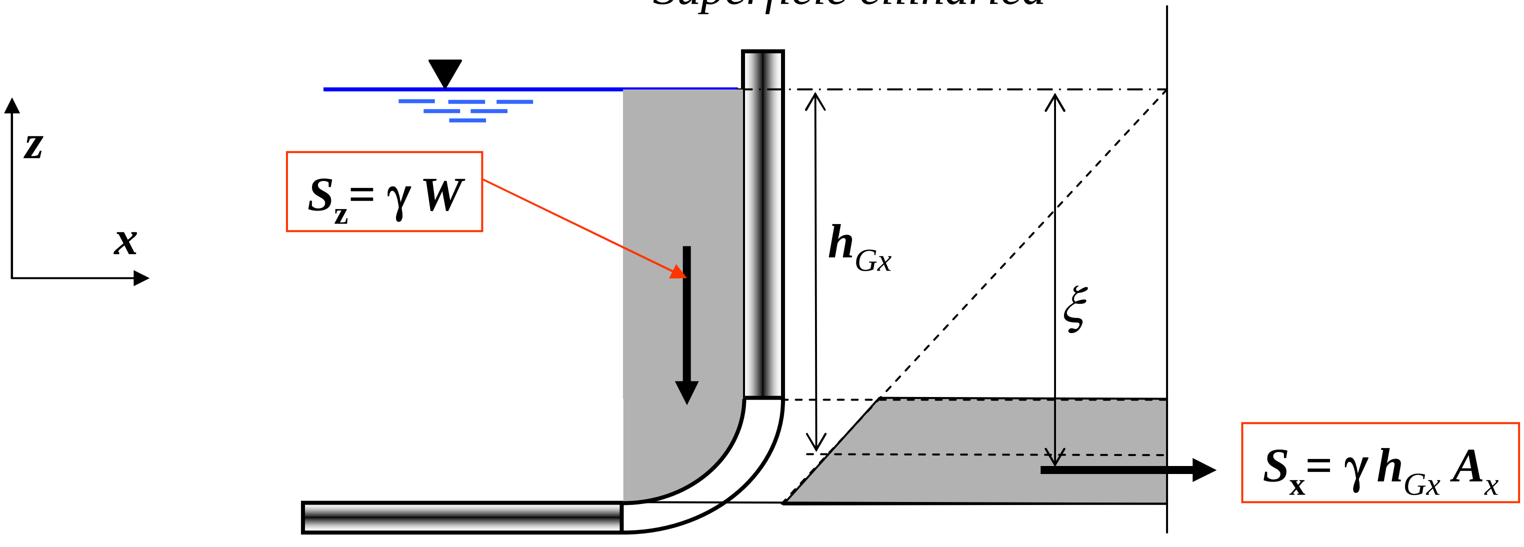
Spinte su superfici gobbe 2/2

$$S_z = \int_{A_z} dS_z = \int_{A_z} p\, dA_z = \int_{A_z} \gamma\, h_z\, dA_z = \gamma \int_{A_z} dW = \gamma W$$

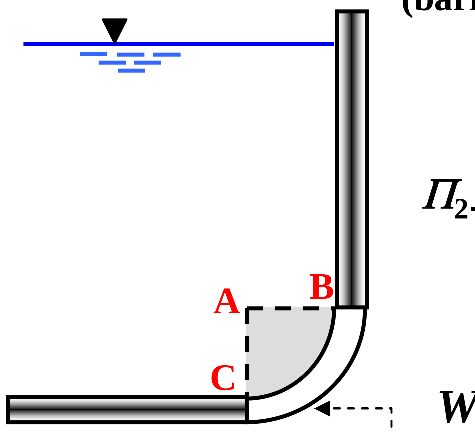
1. *Peso colonna sovrastante*
2. *Applicata nel baricentro della colonna*

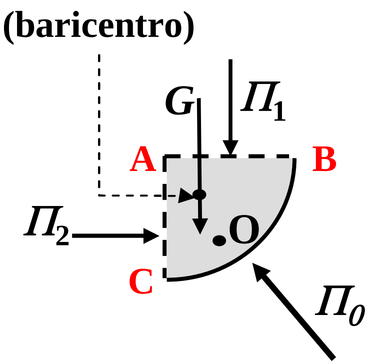


Superficie cilindrica

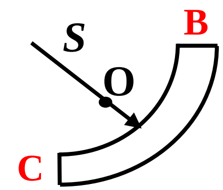


Equazione globale dell'equilibrio statico





$$\overline{S} = -\overline{\Pi_0}$$



_W_: volume finito (volume di controllo); la sua scelta dipende dal tipo di problema che si affronta

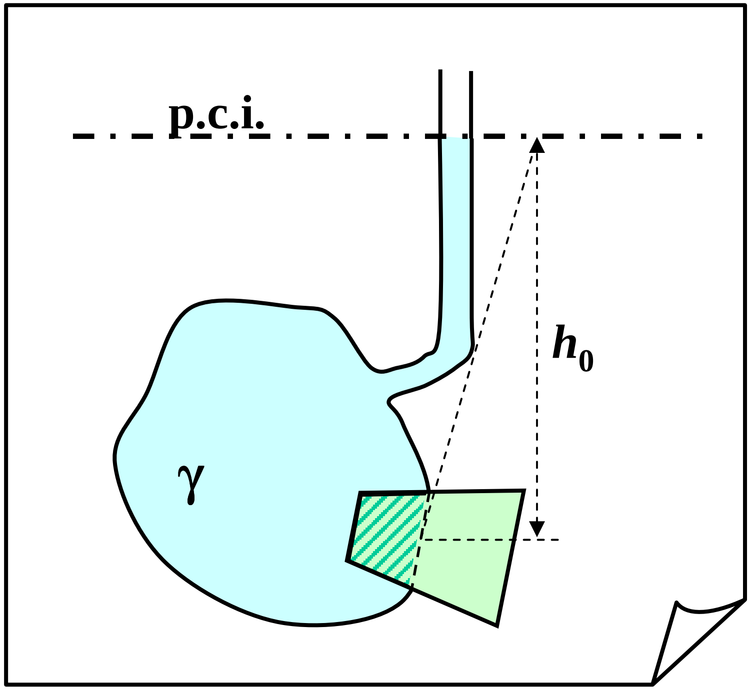
$$\int_W \rho\, g\, dW = -\int_A p\, \mathbf{n}\, dA$$

Risultante delle forze di massa su _W_

Risultante delle spinte elementari _p_n sugli elementini della superficie di contorno

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{G_i}} + \overrightarrow{\mathbf{\Pi_i}} = \mathbf{0}}$$

Equazione globale dell'equilibrio statico: esempio

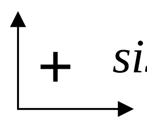


$$\underline{G} + \underline{\Pi}_0 + \underline{\Pi}_1 = 0$$

$$\underline{S} = \underline{\Pi}_0 = -\,\underline{\Pi}_1 - \underline{G}$$

$\Pi_1 = \gamma\, h_0\, A$ *(applicata nel centro di spinta, diretta ortogonalmente alla superficie piana da destra a sinistra)*

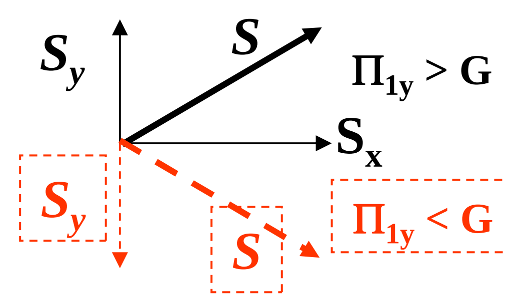
$G = \gamma\, W$ *(peso; applicato nel baricentro del volume)*

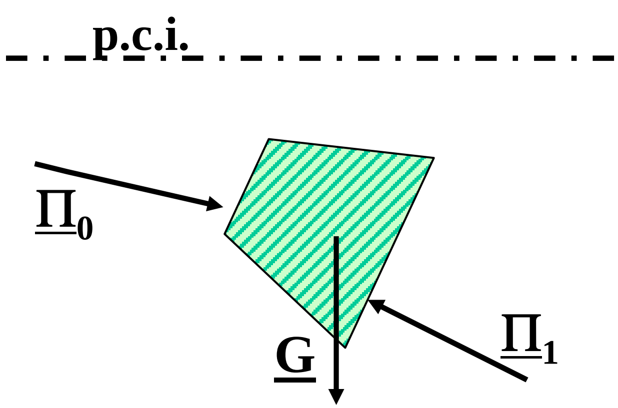


sistema di riferimento

$$S_x = \Pi_{1x}$$

$$S_y = -\,\Pi_{1y} + G$$



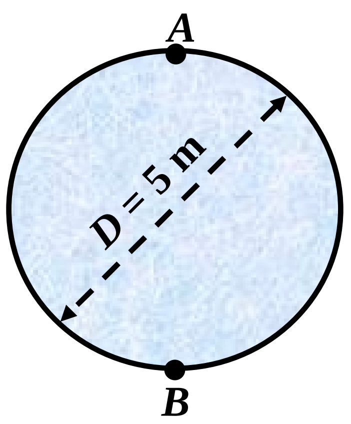


per trovare il punto di applicazione della ***S***

equilibrio alla rotazione

Fluidi di piccolo peso specifico
(Oppure fluidi sottoposti ad elevate pressioni contenuti in piccoli recipienti)

1. Gas (modeste altezze); nei gas $p \approx$ costante



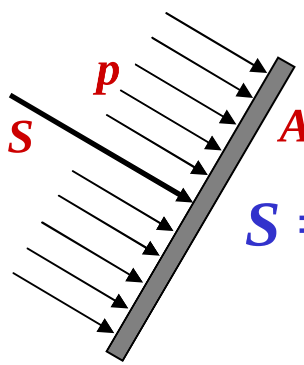
Aria 20 ºC

$p_A = 9{,}806\ \mathrm{N/cm^2} \approx 9.8 \times 10^4\ \mathrm{N/m^2}$

$\gamma = 23.24\ \mathrm{N/m^3} \approx \mathrm{cost.}$

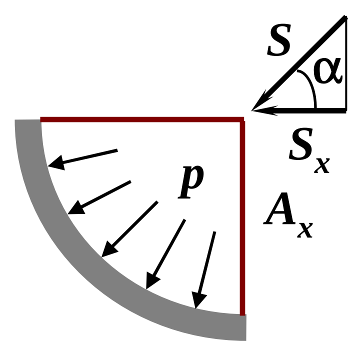
$p_B = p_A + \gamma \times 5 = p_A + 116 \Rightarrow (p_B - p_A)\,/\,p_B \times 100 \approx 1.2\ ‰$

Spinta su superficie piana



$S = p\,A$

Spinta su superficie curva *(metodo delle componenti)*



$dS_x = p\,dA\cos\alpha = p\,dA_x$

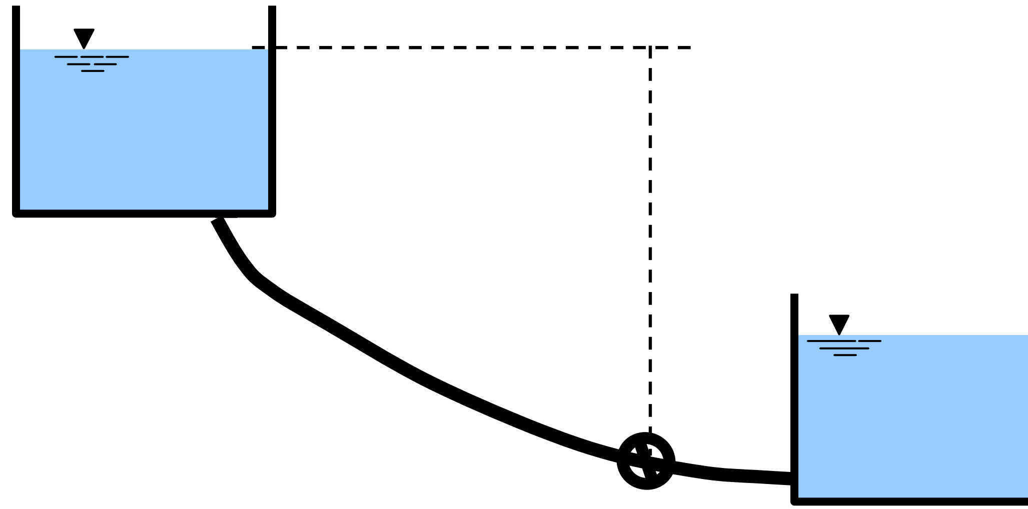
$S_x = p\,A_x$

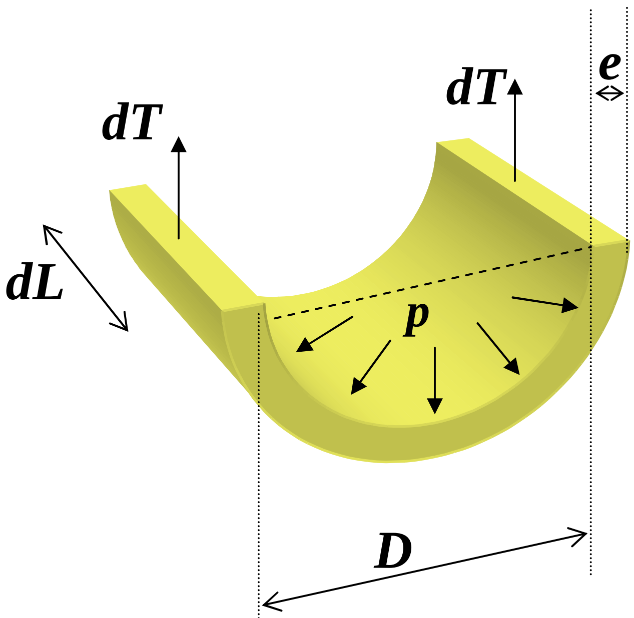
$S_y = p\,A_y$

$S_z = p\,A_z$

2. Liquidi con *p* elevate

Come nei gas, $p \approx$ cost





$$2\,dT = S$$

$$S = p\,D\,dL$$

$$dT = \sigma\,e\,dL$$

$$e = dT / \sigma\,dL$$

$$e = \frac{pD}{2\,\sigma}$$

Formula di Mariotte

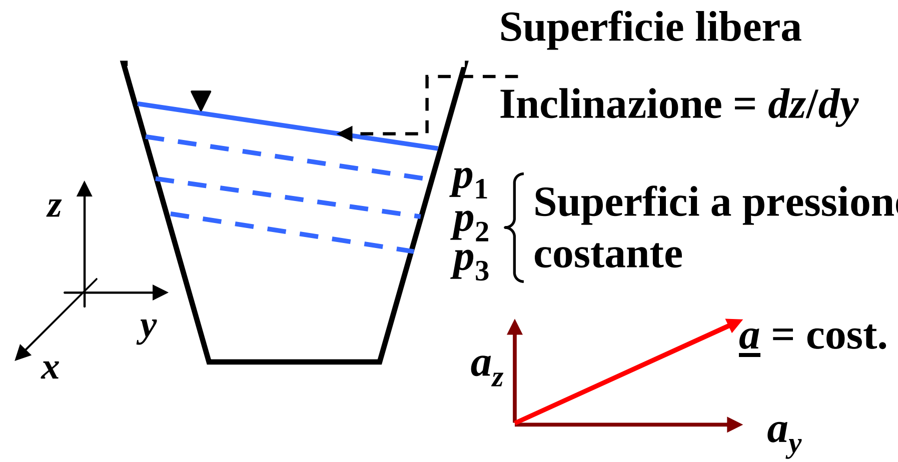
σ = *tensione ammissibile a trazione del materiale*

Equilibrio relativo (nel campo gravitazionale)

Anche se il fluido è in movimento, se si muove come un corpo rigido, gli sforzi tangenziali, τ, sono nulli

$$\boxed{-\nabla p - \gamma \boldsymbol{k} = \rho \boldsymbol{a}}$$

Componenti ⇒
$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho\, a_x \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho\, a_y \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z} = \gamma + \rho\, a_z \end{cases}$$



<u>Esempio</u>: liquido all'interno di un contenitore aperto, in moto rettilineo con accelerazione costante, <u>*a*</u>. Poichè a_x = 0, ☆*p* / ☆*x* = 0. Lungo le direzioni *y* e *z*:

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\, a_y$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma + \rho\, a_z$$

La variazione di pressione tra due punti in (*y*, *z*) e (*y* + *dy*, *z* + *dz*) è

$$dp = (\partial p / \partial y)\, dy + (\partial p / \partial z)\, dz$$

$$dp = -\rho\, a_y\, dy - \rho\, (g + a_z)\, dz$$

Lungo una superficie a pressione costante, *dp* = 0 ⇒ inclinazione isobare

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{a_y}{g + a_z}$$

La superficie libera è inclinata se $a_y \neq 0$. Tutte le linee a *p* = costante sono parallele alla superficie libera

Se $a_y = 0$, $a_z \neq 0$ (massa di fluido accelera in direzione verticale) $\Rightarrow$ Superficie libera orizzontale

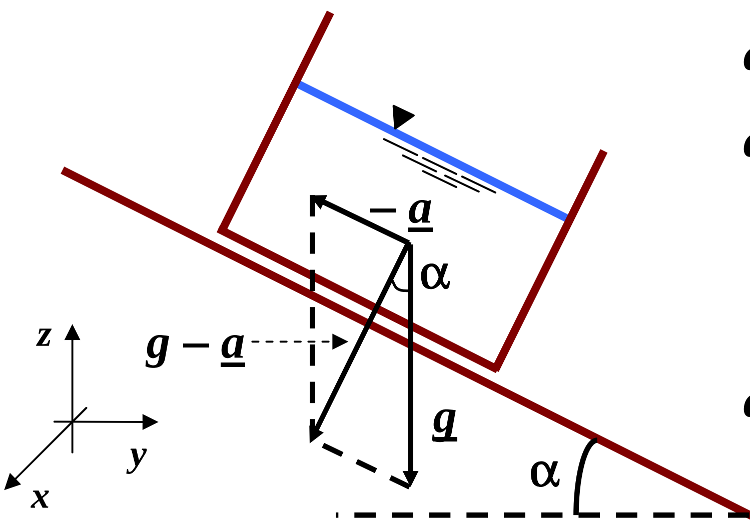
La distribuzione di pressione NON È IDROSTATICA

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\,(g + a_z)$$

Fluidi con ρ = costante; p varia linearmente con la quota, z.

Esempio: secchio d'acqua in un ascensore che sta salendo $\Rightarrow$ p maggiore di quando è fermo
secchio d'acqua in un ascensore che sta scendendo $\Rightarrow$ p minore di quando è fermo
secchio d'acqua in caduta libera ($a_z = -g$) $\Rightarrow$ $p = 0$ in tutta la massa liquida

---



$a_y = -g \sin\alpha \cos\alpha$; $a_z = g \sin\alpha \sin\alpha$;

$dp = (\partial p / \partial y)\, dy + (\partial p / \partial z)\, dz$

$dp = -\rho\, a_y\, dy - \rho\,(g + a_z)\, dz$

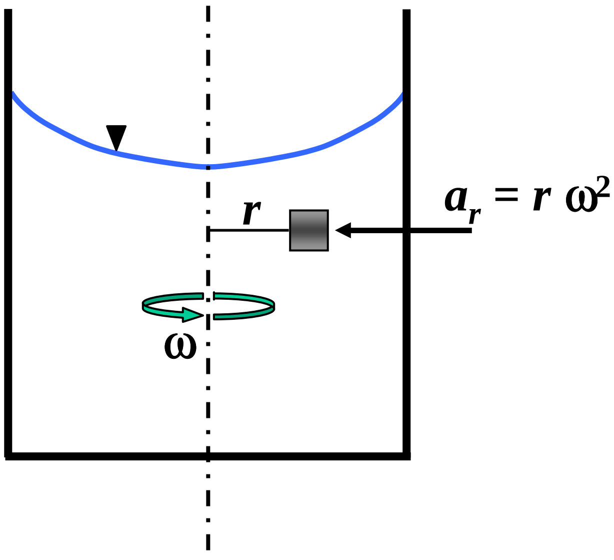
$dp = \rho\, g \sin\alpha \cos\alpha\, dy - \rho\,(g + g \sin\alpha \sin\alpha)\, dz$

$dp = 0 \Rightarrow dz / dy = -(\sin\alpha \cos\alpha) / \sin^2\alpha = -\mathrm{tg}\,\alpha$

$z + y\,\mathrm{tg}\,\alpha = costante$

Superfici isobariche

Rotazione (Schema di corpo rigido)



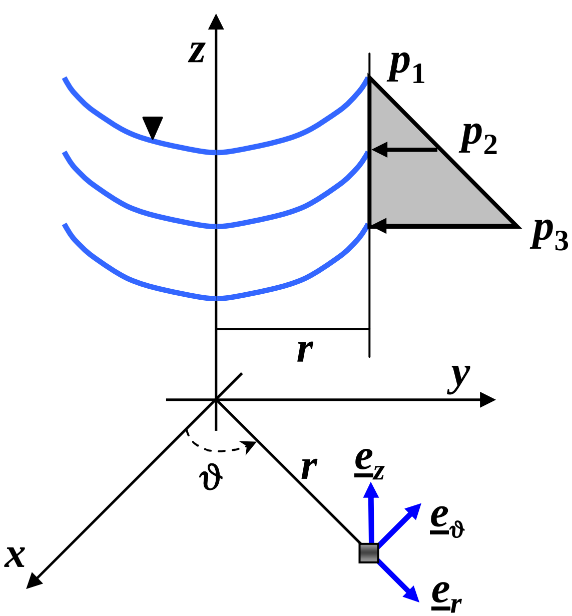
In coordinate cilindriche: $\nabla p = \dfrac{\partial p}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \vartheta}\underline{\boldsymbol{e}}_\vartheta + \dfrac{\partial p}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_z$

$$\boldsymbol{a_r = -\,r\,\omega^2\,\underline{e}_r}; \qquad \boldsymbol{a_\vartheta = a_z = 0}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\, r\, \omega^2 \qquad \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$$

La pressione è funzione soltanto di *r* e *z*, per cui

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho\, r\, \omega^2 - \gamma dz$$



Lungo una superficie a *p* costante: *dz / dr = r ω² / g*

Equazione superficie a p = costante

(paraboloide di rotazione)

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \cos t.$$

Integrando: $\boxed{p = \dfrac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \gamma z + \cos t.}$

La cost. può essere una *p* in un dato punto (r_0, z_0)