Prof. Alberto Guadagnini

Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento (DIIAR)

Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci, 32, 20133 Milano- Italy

Correnti

Note del Corso di *Meccanica dei Fluidi*

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica - Facoltà di Milano Bovisa

A.A. 2001 / 2002

Correnti

$\Rightarrow$ perdite distribuite nei condotti circolari: scabrezza

$\Rightarrow$ perdite distribuite nei condotti circolari: abaco di Moody

$\Rightarrow$ perdite distribuite nei condotti circolari: altre formule

$\Rightarrow$ perdite concentrate: allargamenti

$\Rightarrow$ perdite concentrate: restringimenti

$\Rightarrow$ perdite concentrate: dispositivi di controllo

$\Rightarrow$ perdite concentrate: varie

$\Rightarrow$ esempi

Perdite distribuite nelle correnti circolari uniformi

Analisi dimensionale:

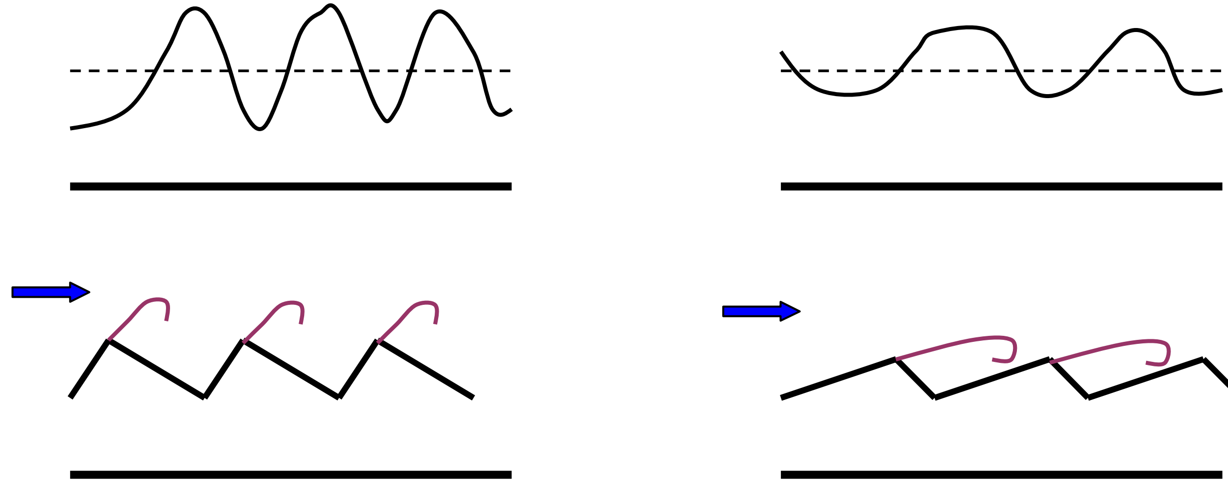
$$\frac{\Delta p / L}{\rho V^2 / D} = f\left(Re = \frac{\rho V D}{\mu}, \frac{r}{D}\right)$$

$$J = \frac{\Delta p / \gamma}{L} = \frac{V^2}{g D} \cdot f\left(Re, \frac{r}{D}\right) = \lambda \cdot \frac{V^2}{2 g D} \qquad \lambda = 2 \cdot f$$

$$J = \lambda \cdot \frac{V^2}{2 g D} \qquad \lambda = \lambda\left(Re, \frac{r}{D}\right)$$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{\rho V^2}{\mu V / D} \approx \frac{\text{sforzi turbolenti}}{\text{sforzi viscosi}}$$

r = scabrezza = ?

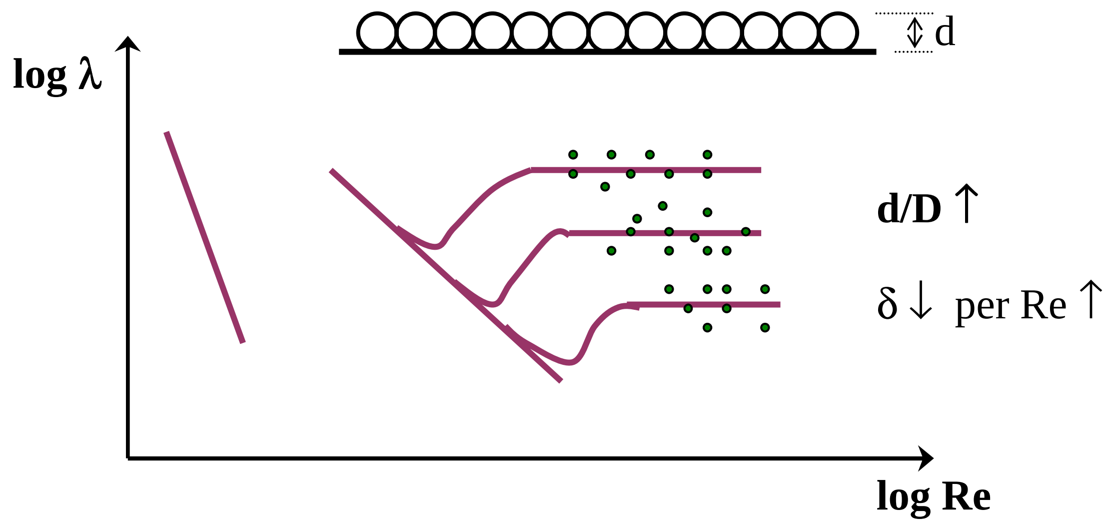


per definire **r** non basta una lunghezza

Nikuradse (1930)

λ = cost

MOTO PURAMENTE TURBOLENTO



Scabrezza equivalente **ε** a pari λ per Re→∞

Perdite distribuite: leggi di resistenza

$$J = \lambda \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g \cdot D}$$

(Darcy-Weisbach)

λ : ***"Coefficiente di resistenza"***

$$\lambda = \lambda\left(Re\,;\,\frac{\varepsilon}{D} \right)$$

dove $$Re = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu}$$ *Numero di Reynolds (adimensionale)*

$\boldsymbol{\varepsilon}$ [m] **=** *scabrezza "media" della superficie*

$\boldsymbol{D}$ [m] **=** *diametro del condotto*

teorico - sperimentale

Moto laminare

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

sperimentale

Moto turbolento di transizione e puramente turbolento

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \cdot \frac{\varepsilon}{D} \right)$$

(Colebrook-White)

N.B. : questa è una formula implicita

Abaco di Moody

formula di Colebrook-White $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{2.51}{\mathrm{Re}\cdot\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71}\cdot\frac{\varepsilon}{D}\right)$$

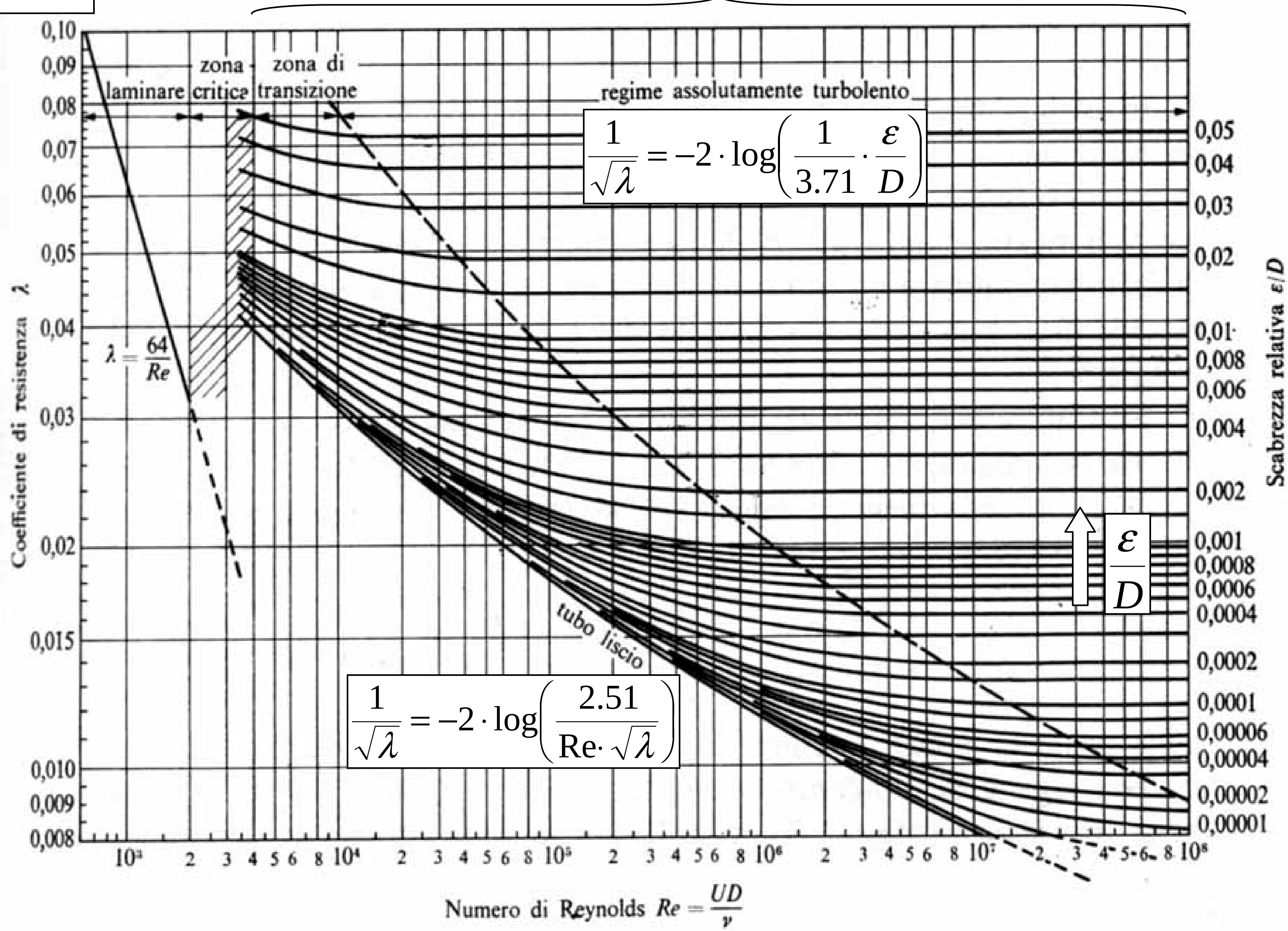


Diagramma di Moody: curve $\lambda = \lambda(Re, \varepsilon/D)$ ottenute dalla formula di Colebrook con diversi valori costanti della scabrezza relativa ε/D.

Formule pratiche per il calcolo delle perdite di carico

Solo per moto assolutamente turbolento

◆**Formula di Chézy**

$$J = \frac{V^2}{C^2 \cdot R}$$

R = raggio idraulico = A / P;
condotti circolari in pressione ⇒ R = D/4

C è dimensionale [$m^{1/2}$ / s]
Espressione (monomia) di Strickler

$$C = k_s \cdot R^{\frac{1}{6}}$$

k_s è dimensionale [$m^{1/3}$ / s] e dipende dal materiale (indice di scabrezza)

indice di scabrezza Manning: n = 1/ k_s

◆**Formule monomie dalla struttura**

$$J = a \cdot \frac{Q^b}{D^c}$$

Q: portata
D: diametro della condotta
a, b, c : parametri che dipendono dal tipo di materiale

Contessini (tubi in acciaio bitumato)

$$J = a \cdot \frac{Q^2}{D^c}$$

a = 0.0012	c = 5.26	tubi nuovi
a = 0.0020	c = 5.44	tubi usati

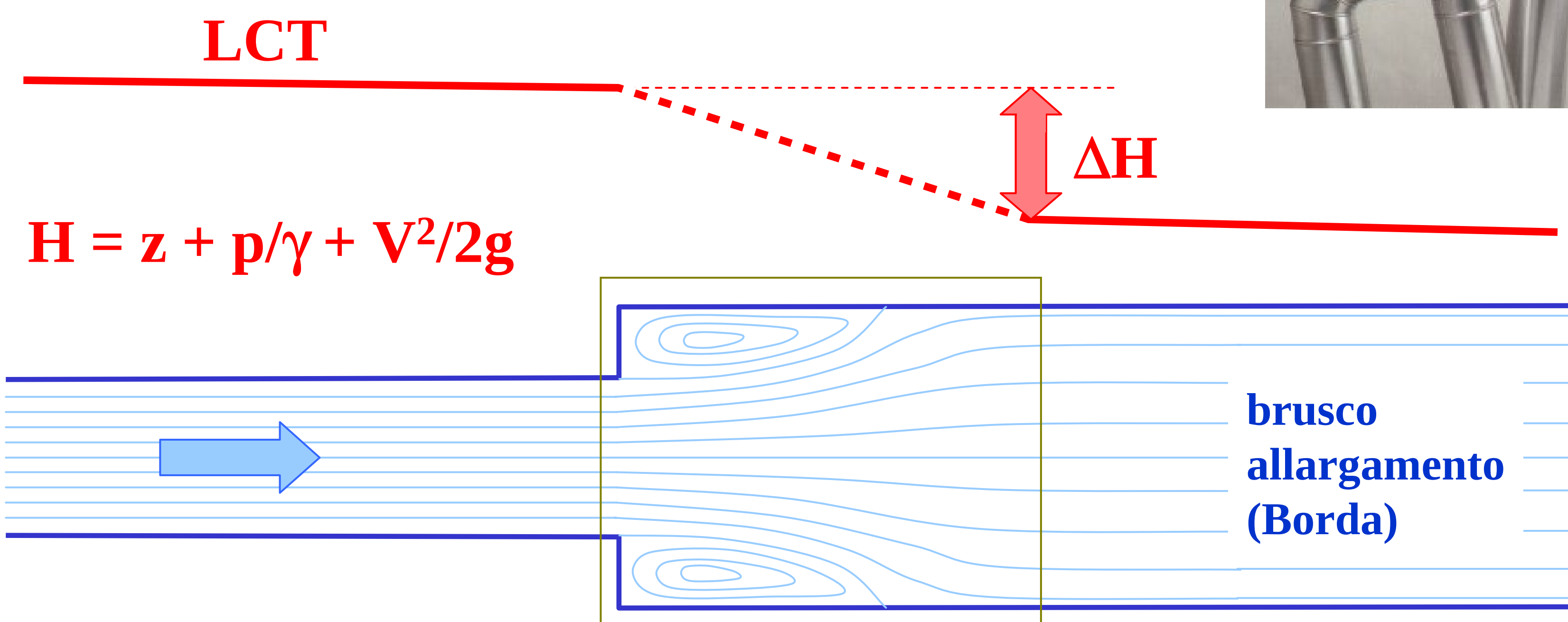
Perdite di carico Localizzate

Cambiamenti di geometria –
- non cilindricità della corrente (valvole, giunti, curve)

Possono essere molto importanti nella regolazione della portata!

$$\Delta H \propto \frac{V^2}{2g}$$

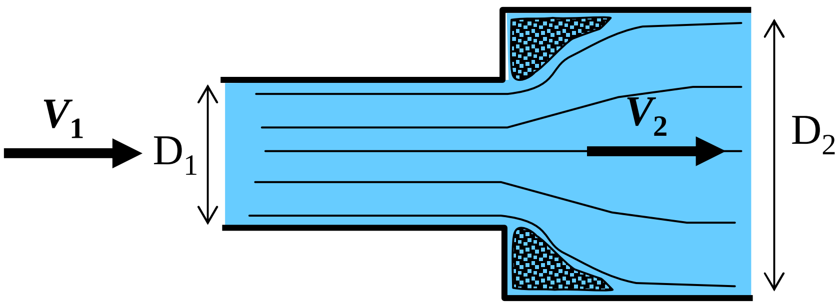
$$H = z + p/\gamma + V^2/2g$$



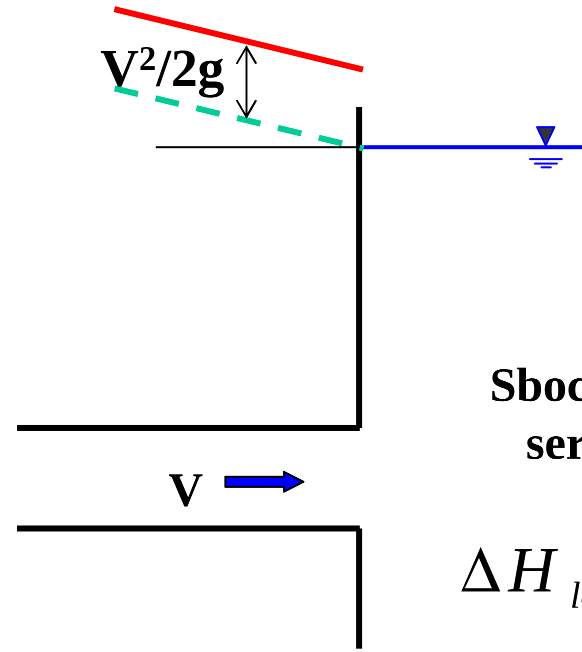
Mescolamento turbolento e dissipazione localizzata di energia

Perdite di carico Localizzate

brusco allargamento (perdita di Borda)



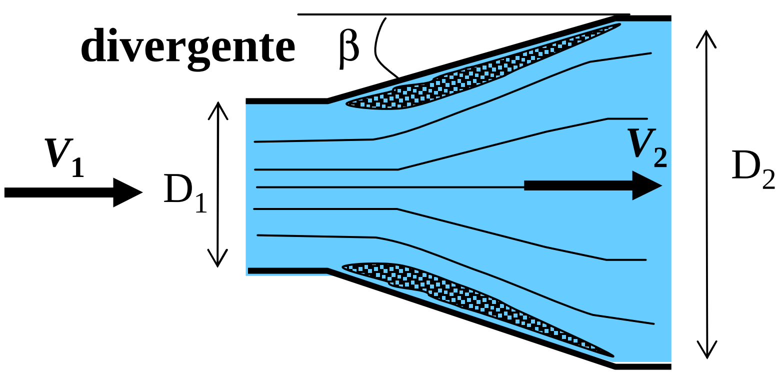
$$\Delta H_{loc} = \frac{1}{2g}\left(V_1 - V_2\right)^2 = \left[1 - \frac{A_1}{A_2}\right]^2 \frac{V_1^2}{2g}$$



Sbocco in un serbatoio

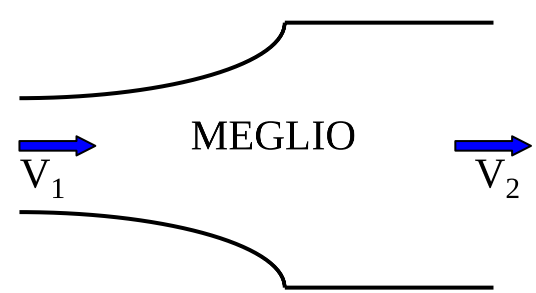
$$\Delta H_{loc} = \frac{V^2}{2g}$$

divergente

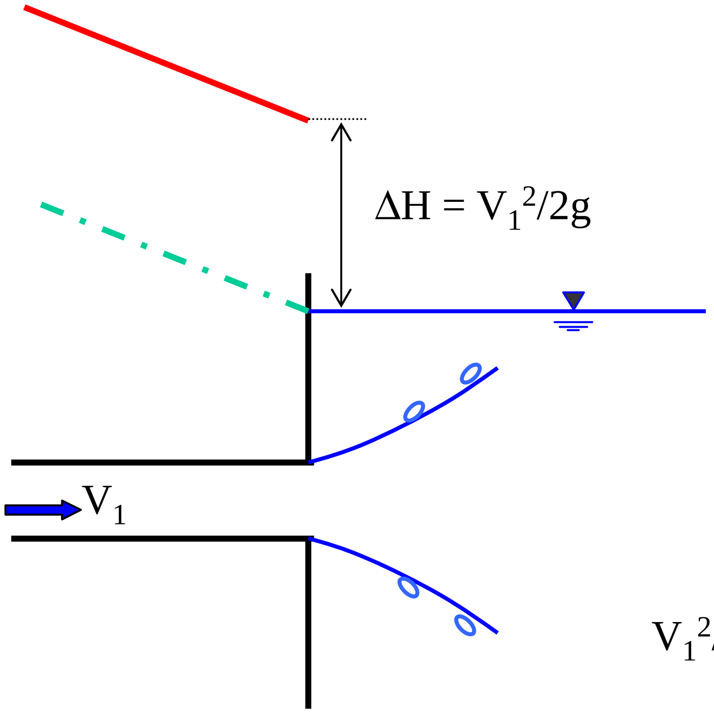


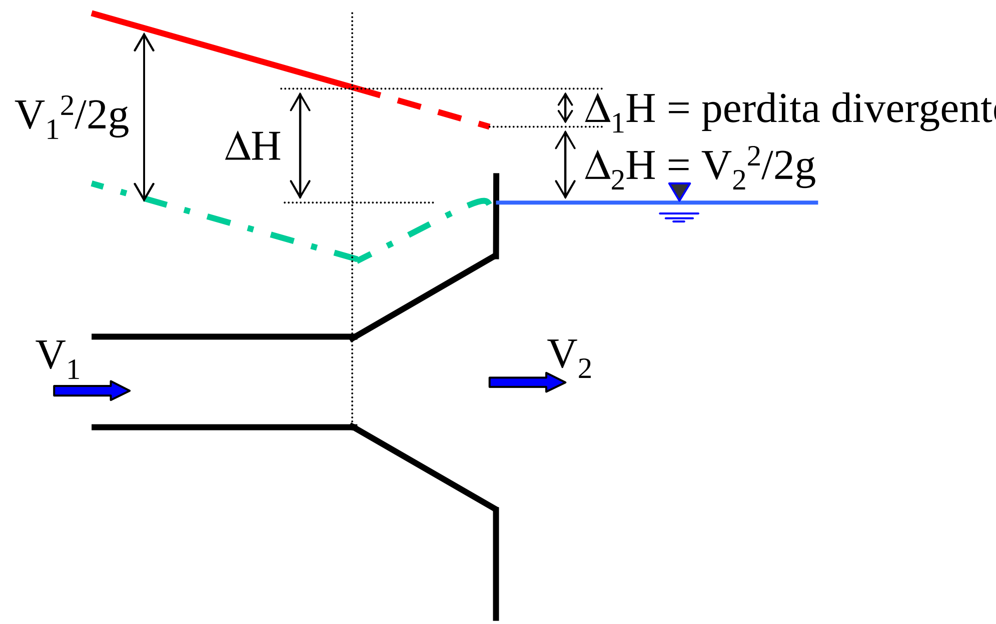
$$\Delta H_{loc} = m(\beta)\frac{1}{2g}\left(V_1 - V_2\right)^2$$

$$\left.\begin{array}{ll} m = \text{MIN} & \text{per } \beta = 6° \\ m = \text{MAX} = 1.2 & \text{per } \beta = 65° \end{array}\right\} \text{dipende dalle perdite continue}$$

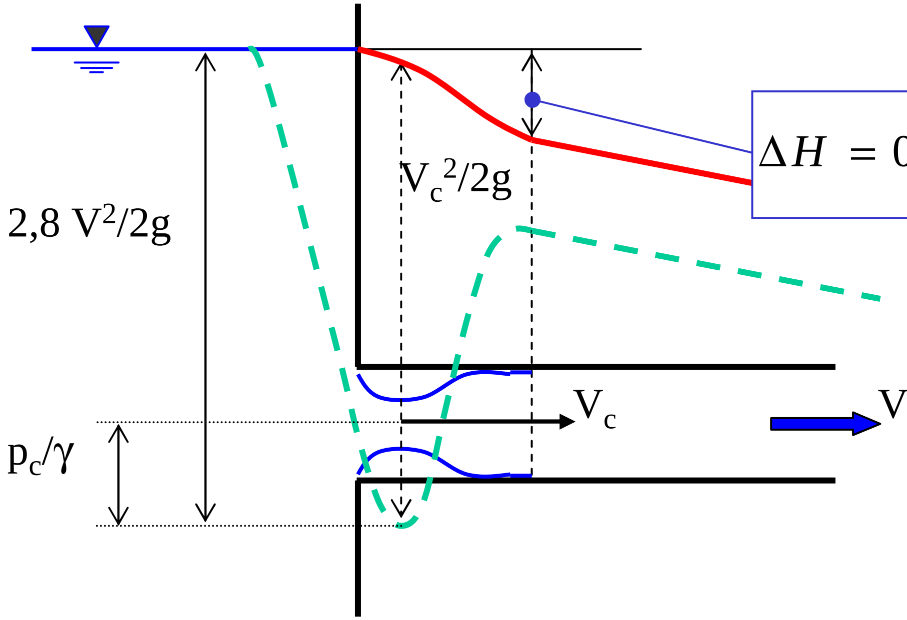


Perdite di carico Localizzate : sbocco in serbatoio





Perdite di carico Localizzate : imbocco non raccordato



$$\Delta H = \underbrace{0.1 \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}}_{\Delta_1 H} + \underbrace{0.4 \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}}_{\Delta_2 H} = 0.5 \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

$$\Delta H = \Delta_1 H + \Delta_2 H$$

V_t (*torricelliana*) $\qquad V_C = C_v \cdot V_t$

Esperienza : $C_C = 0.61 \qquad C_v = 0.98$

$$A_C \cdot V_C = A \cdot C_C \cdot V_C = A \cdot V \Rightarrow V_C = \frac{V}{C_C}$$

$$\Delta_1 H = \frac{V_t^2}{2 \cdot g} - \frac{V_C^2}{2 \cdot g} = \frac{V_C^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{1}{C_v^2} - 1 \right) =$$

$$= \frac{V_C^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{1 - C_v^2}{C_v^2 (\cong 1)} = \frac{V_C^2}{2 \cdot g} \cdot \left(1 - C_v^2\right) =$$

$$= = \frac{V^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{1 - C_v^2}{C_c^2} \cong 0.1 \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

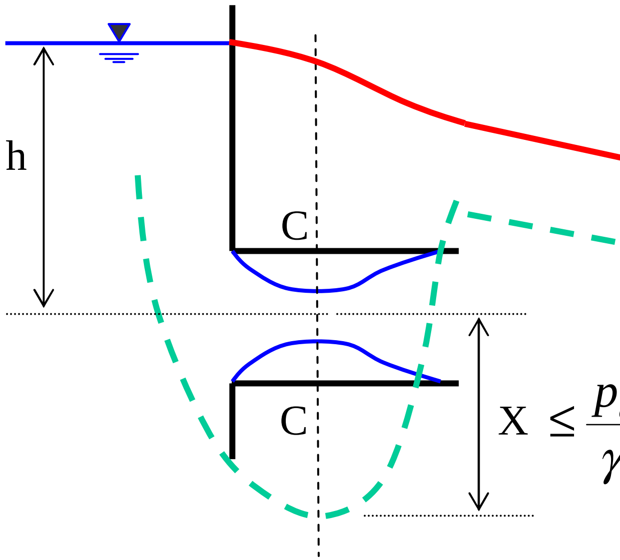
$$\Delta_2 H = \frac{(V_C - V)^2}{2 \cdot g} (\mathrm{BORDA}) = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{V}{C_C} - V \right)^2 =$$

$$= \frac{V^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{1}{C_C} - 1 \right)^2 \cong 0.4 \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$$

$$\boxed{\Delta H = 0.5 \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}}$$

Perdite di carico Localizzate : imbocco non raccordato



Piezometrica (da linea CT): $\frac{V_c^2}{2g} = \frac{1}{C_c^{\ 2}} \frac{V^2}{2g} = 2.7 \frac{V^2}{2g}$

Piezometrica (da pelo libero) $\Delta_1 H + \frac{V_C^2}{2 \cdot g} = 2.8 \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$

$$X \le \frac{p_a^*}{\gamma} (= 10.33m \quad per \quad H_2O)$$

se da calcolo $X > \frac{p_a^*}{\gamma}$ ⇒ $X = \frac{p_a^*}{\gamma}$

e CC = sezione di controllo

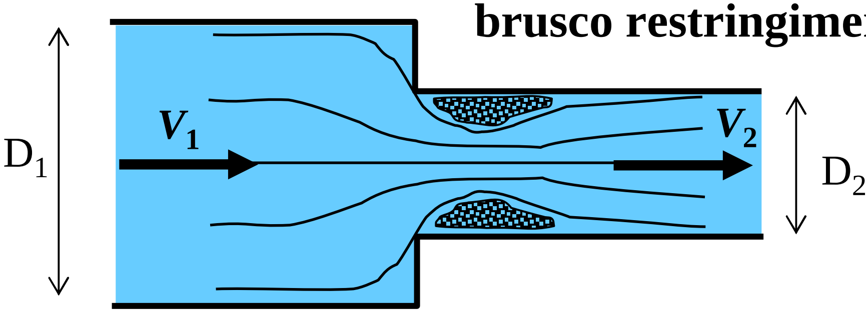
$$V_{C\max} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(h + \frac{p_a^*}{\gamma} \right)} \quad (\text{trascuro} \quad \Delta_1 H) \xrightarrow{H_2O} Q_{\max} = C_C \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h + 10.33)}$$

in realtà (tensione di vapor saturo): $\frac{p_a^* - p_v^*}{\gamma} \cong 10.33 - 0.20m$

$$\Rightarrow \quad Q_{\max} \cong C_C \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h + 10.13)}$$

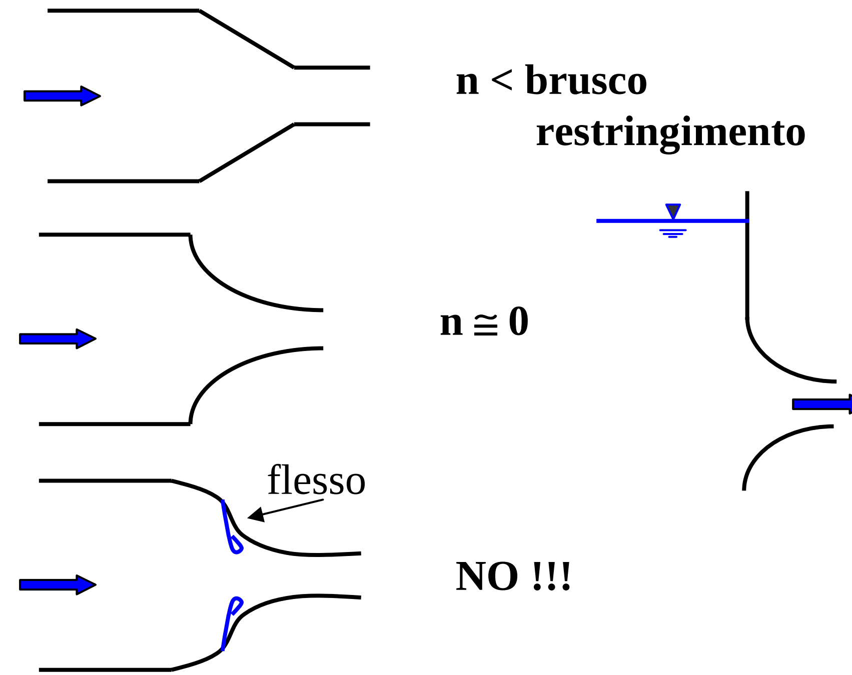
Perdite di carico Localizzate: restringimenti ed imbocchi

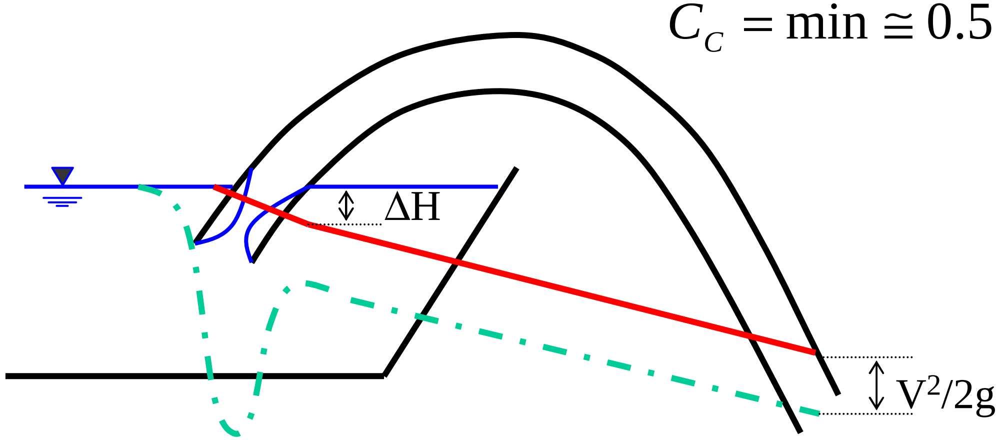
brusco restringimento



$$\Delta H_{loc} = n \frac{V_2^2}{2g}$$

con $n = 0.5$ per $D_1 > 2\,D_2$
$n < 0.5$ per $D_1 < 2\,D_2$



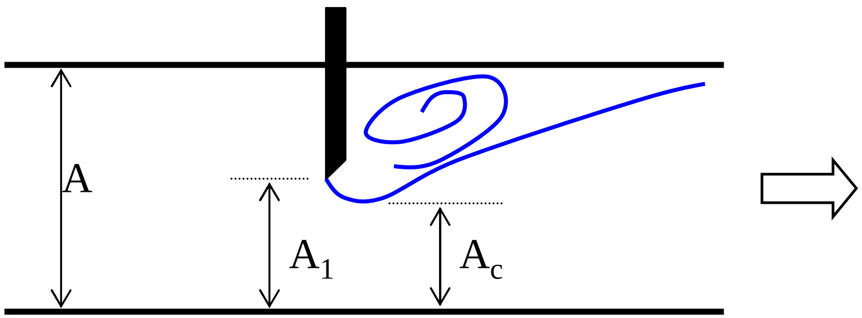


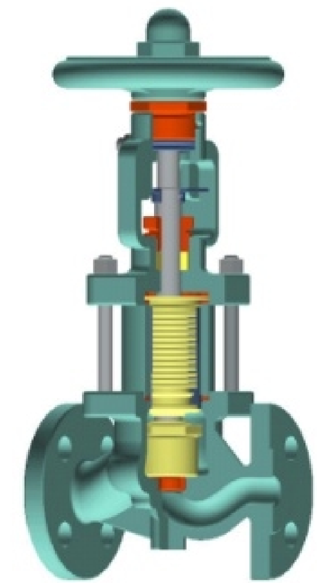
$$C_C = \min \cong 0.5 \quad \Rightarrow \quad \Delta_1 H = \frac{V^2}{2\cdot g}\cdot\frac{1-C_v^2}{C_C^2} = 0.16\cdot\frac{V^2}{2\cdot g}$$

$$\Delta_2 H = \frac{V^2}{2\cdot g}\cdot\left(\frac{1}{C_C}-1\right)^2 = \frac{V^2}{2\cdot g}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta H = 1.16\cdot\frac{V^2}{2\cdot g}$$

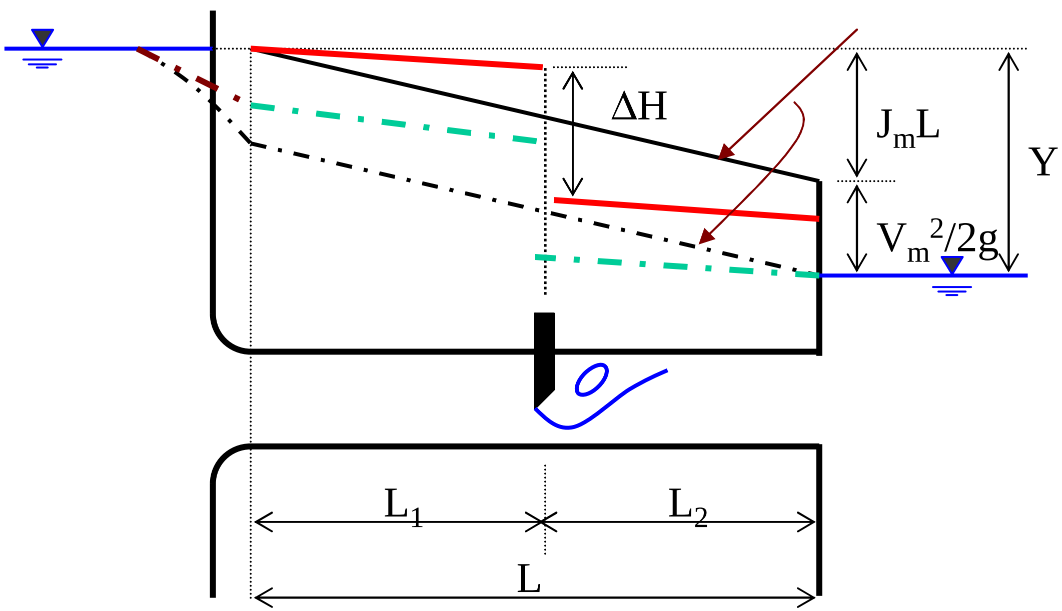
Perdite di carico Localizzate: saracinesche e valvole





$$\Delta H = \frac{(V_C - V)^2}{2 \cdot g} = \frac{V^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{1}{m \cdot C_C} - 1 \right)^2$$

$$m = \frac{A_1}{A}$$



$$Y = L_1 \cdot J + L_2 \cdot J + \Delta H + \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

al variare del rapporto di strozzamento **m** $\Rightarrow$ a parità di carico disponibile **Y** variano le perdite distribuite J_i e il termine cinetico di uscita (perdita di sbocco)

Regola la portata

Perdite di carico Localizzate: curve, …

$$\Delta H_{loc} = n \frac{V^2}{2g}$$

dove ***n*** dipende dalla geometria
e dal regime di moto
(cfr. documentazione tecnica)

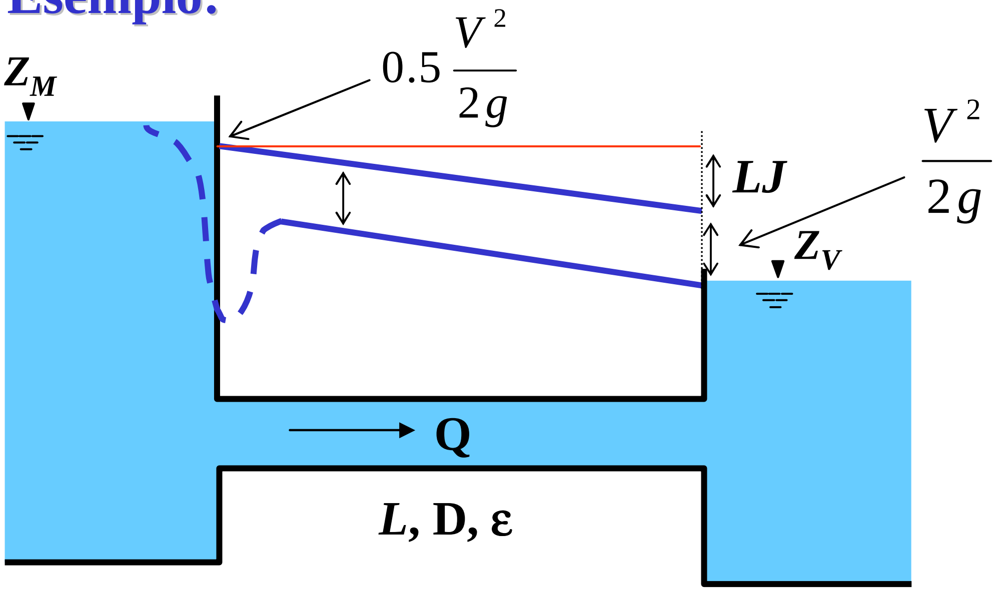
saracinesche completamente aperte: **n = 0.15**

curve: **n < 0.6**

confluenze, separazioni: **0.5 < n < 2**
(in funzione della geometria e dei rapporti fra le portate)

… … … …

Esempio:



Noti: Z_M , Q , g , L , D , ε , ρ , μ

Det. : il livello Z_V ***del serbatoio di valle***

Modello 1-D tra i due serbatoi:

$$\begin{cases} Z_M = Z_V + 0.5\,\dfrac{Q^2}{2gA^2} + JL + \dfrac{Q^2}{2gA^2} \\ J = \lambda\,\dfrac{V^2}{2gD} = \lambda\,\dfrac{Q^2}{2gDA^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_M = Z_V + 0.5\,\dfrac{Q^2}{2gA^2} + \lambda\,\dfrac{Q^2}{2gDA^2} + \dfrac{Q^2}{2gA^2} \\ \lambda = \lambda\left(Re\,;\,\dfrac{\varepsilon}{D} \right) \end{cases}$$

funzione da definire in funzione del regime di movimento

Noti : $\dfrac{\varepsilon}{D}$ *e* $Re = \dfrac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu}$

con l'abaco di Moody definisco il regime di Moto e quindi la ***legge di resistenza*** *da utilizzare*

moto laminare $\lambda = \dfrac{64}{\mathrm{Re}}$

moto turbolento di transizione $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\dfrac{2.51}{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} + \dfrac{1}{3.71} \cdot \dfrac{\varepsilon}{D} \right)$

moto in tubi lisci $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\dfrac{2.51}{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} \right)$

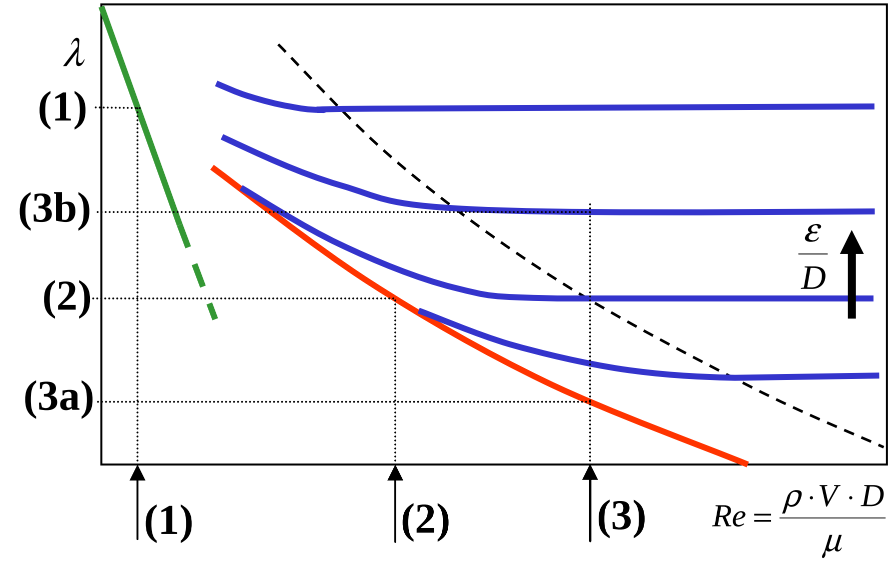
moto puramente turbolento $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\dfrac{1}{3.71} \cdot \dfrac{\varepsilon}{D} \right)$

(1) $$\begin{cases} Z_M = Z_V + 0.5\dfrac{Q^2}{2gA^2} + \lambda\dfrac{Q^2}{2gDA^2} + \dfrac{Q^2}{2gA^2} \\ \lambda = \dfrac{64}{\mathrm{Re}} \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} Z_M = Z_V + 0.5\dfrac{Q^2}{2gA^2} + \lambda\dfrac{Q^2}{2gDA^2} + \dfrac{Q^2}{2gA^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\cdot\log\left(\dfrac{2.51}{\mathrm{Re}\cdot\sqrt{\lambda}}\right) \end{cases}$$

(3a) $$\begin{cases} Z_M = Z_V + 0.5\dfrac{Q^2}{2gA^2} + \lambda\dfrac{Q^2}{2gDA^2} + \dfrac{Q^2}{2gA^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\cdot\log\left(\dfrac{2.51}{\mathrm{Re}\cdot\sqrt{\lambda}} + \dfrac{1}{3.71}\cdot\dfrac{\varepsilon}{D}\right) \end{cases}$$

(3b) $$\begin{cases} Z_M = Z_V + 0.5\dfrac{Q^2}{2gA^2} + \lambda\dfrac{Q^2}{2gDA^2} + \dfrac{Q^2}{2gA^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\cdot\log\left(\dfrac{1}{3.71}\cdot\dfrac{\varepsilon}{D}\right) \end{cases}$$



Re < 2000

Re > 2000
ε/D = 0

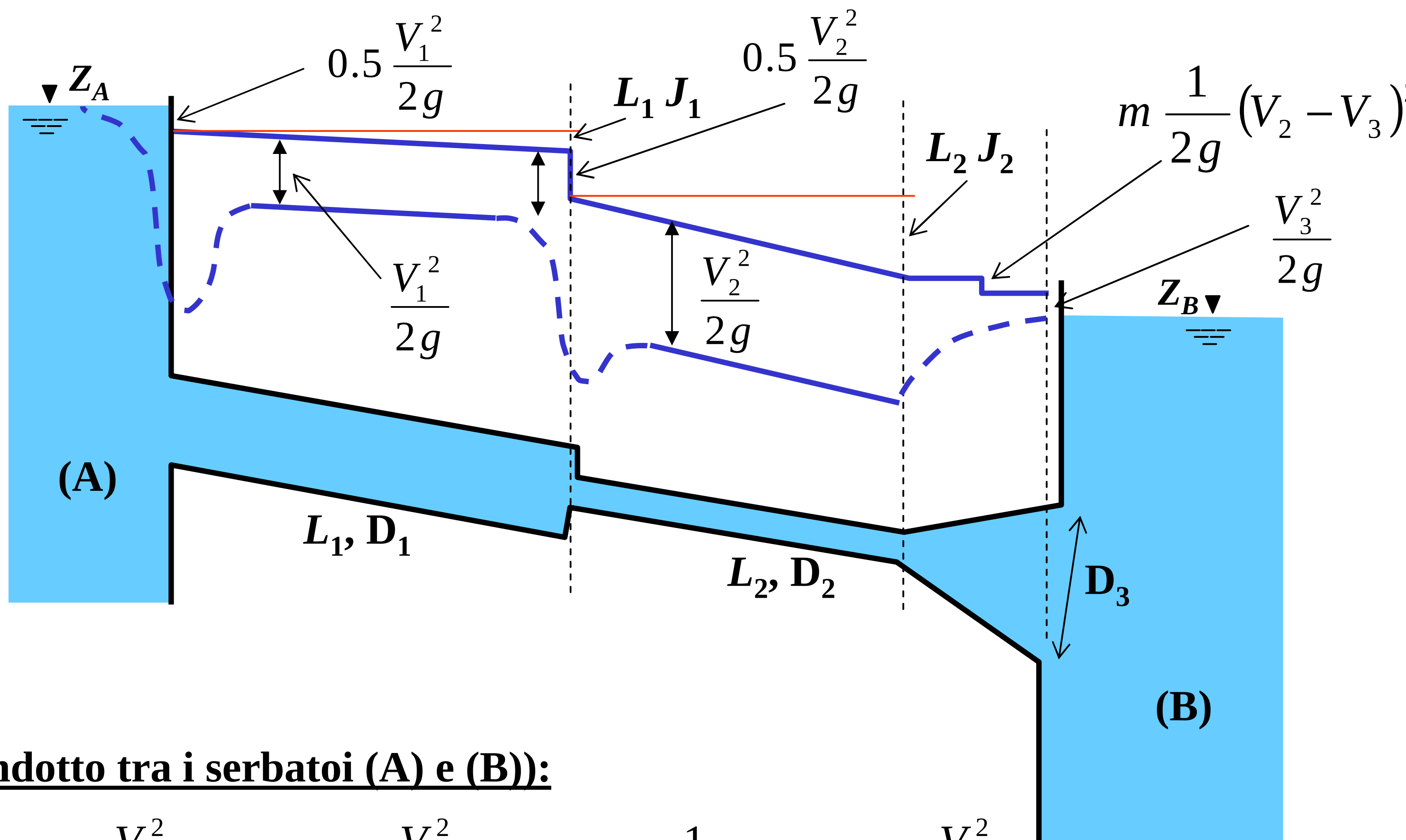
Re > 2000
due casi

ε/D = basso
o
ε/D = alto

Sistemi di due equazioni in due incognite Z_V e λ;

Attenzione che nei sistemi (2) e (3a) le leggi di resistenza sono implicite, quindi λ si può determinare solo con metodi iterativi !!!

Esempio:



Eq. 1-D (condotto tra i serbatoi (A) e (B)):

$$Z_A - Z_B = 0.5\frac{V_1^2}{2g} + J_1 L_1 + 0.5\frac{V_2^2}{2g} + J_2 L_2 + m\frac{1}{2g}(V_2 - V_3)^2 + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$Z_A - Z_B = 0.5\frac{Q^2}{2gA_1^2} + J_1 L_1 + 0.5\frac{Q^2}{2gA_2^2} + J_2 L_2 + m\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3}\right)^2 + \frac{Q^2}{2gA_3^2}$$

esprimendo J_1 e J_2 in funzione di Q