Prof. Alberto Guadagnini - Dr. Monica Riva

Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento (DIIAR)

Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci, 32, 20133 Milano- Italy

DINAMICA DEI FLUIDI VISCOSI

Note del Corso di *Meccanica dei Fluidi*

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica - Facoltà di Milano Bovisa

Sezioni A & B

A.A. 2000 / 2001

Dinamica dei Fluidi Viscosi

$\Rightarrow$ Deformazioni del fluido

$\Rightarrow$ Tensore degli sforzi

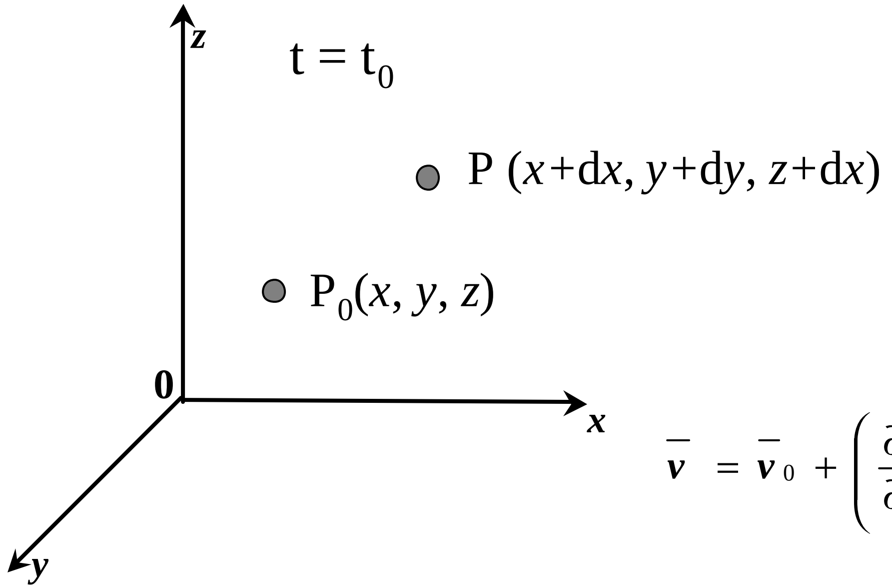
$\Rightarrow$ Fluidi Stokesiani

$\Rightarrow$ Equazione costitutiva dei fluidi Newtoniani

$\Rightarrow$ Equazione di Navier - Stokes

$\Rightarrow$ Moto in tubi cilindrici

Analisi deformazioni del fluido



$$\bar{\boldsymbol{v}}_0\,(\mathrm{P}_0) = \bar{\boldsymbol{v}}_0\,(x, y, z, t_0)$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}\,(\mathrm{P}) = \bar{\boldsymbol{v}}\,(x + \mathrm{d}x,\ y + \mathrm{d}y,\ z + \mathrm{d}z,\ t_0)$$

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{v}}_0 + \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial x}\right)_{x,y,z,t_0} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial y}\right)_{x,y,z,t_0} \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial z}\right)_{x,y,z,t_0} \mathrm{d}z$$

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{v}}_0 + \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} \cdot \left[grad\,\bar{\boldsymbol{v}}\right]_{x,y,z,t_0}}$$

Dove:

$$\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} = [\mathrm{d}x \quad \mathrm{d}y \quad \mathrm{d}z]$$

Vettore riga

$$grad\ \bar{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Matrice

eq1

Analisi deformazioni del fluido

Riscrivendo i termini fuori diagonali di $grad\,\bar{\mathbf{v}}$

$$grad\,\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{grad\,\bar{\mathbf{v}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathrm{W}}}}$$

$\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ = matrice simmetrica

$\underline{\underline{\mathrm{W}}}$ = matrice emisimmetrica

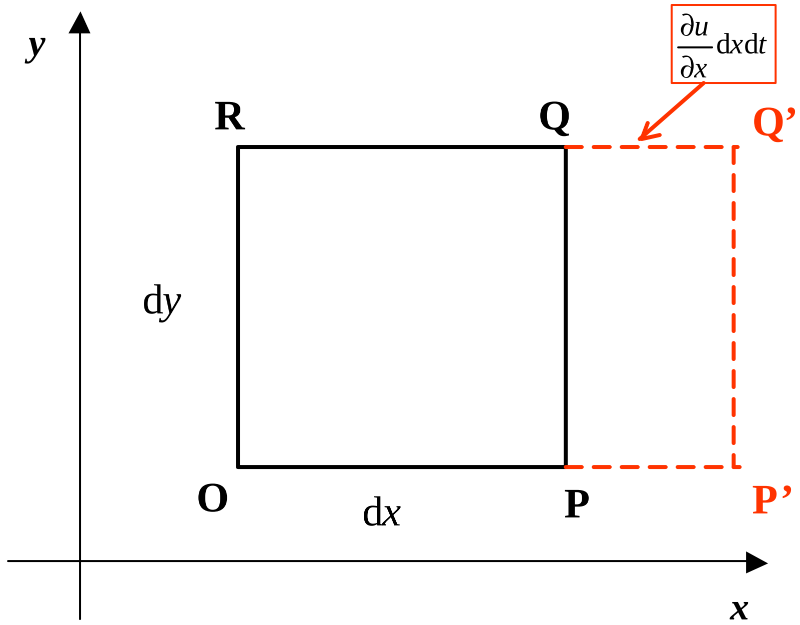
$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Tensore delle velocità di deformazione

$$\underline{\underline{\mathrm{W}}} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Tensore delle rotazioni rigide

Significato fisico termini diagonali di $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$



Analisi del caso di MOTO PIANO

O $\longrightarrow$ velocità nulla (evidenzio solo le velocità relative)

P $\longrightarrow$ $u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x; \qquad v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$

Q $\longrightarrow$ $u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y; \qquad v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$

R $\longrightarrow$ $u = \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y; \qquad v = \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$

$$\mathrm{d}\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

Allungamento unitario subito dal cilindretto di lunghezza infinitesima dx nel tempo dt

Effetto di $\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_x}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Velocità di deformazione lineare lungo l'asse *x*

Analogamente per $\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial w}{\partial z}$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_y}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\mathrm{d}\varepsilon_z}{dt} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

(Caso 3D)

Significato fisico termini diagonali di $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$

Nel caso 3D, l'effetto dell'azione simultanea delle componenti diagonali di $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ consiste in una espansione di volume

$$dW = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt\right) \cdot \left(dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt\right) \cdot \left(dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz dt\right) - dx dy dz$$

$$dW = \; + \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} dt + \frac{\partial v}{\partial y} dt + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} dt dt\right) dx dy dz \, dt$$

Al prim'ordine

$$\frac{dW}{W} = \; + \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dt$$

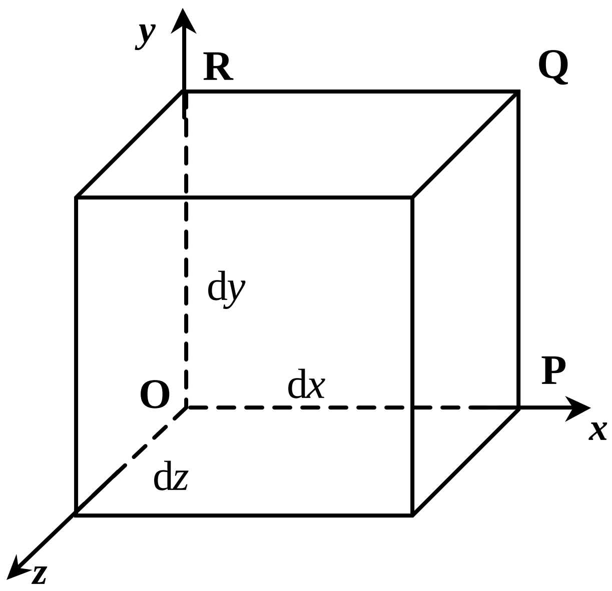
La Velocità di deformazione per unità di volume

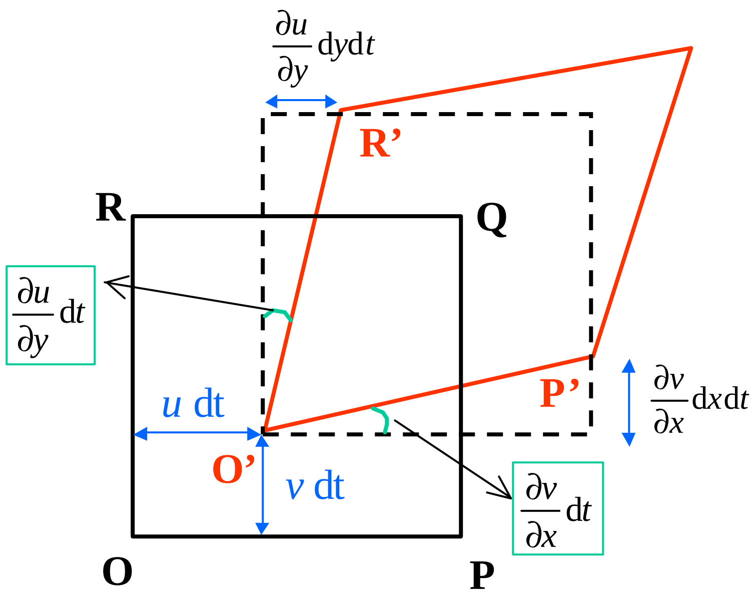
$$\frac{dW}{dt}\frac{1}{W} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = div\,\bar{\mathbf{v}}$$

Rappresenta la dilatazione volumetrica dell'elemento di fluido, <u>senza cambiamento di forma</u>

Se il fluido è incomprimibile $\quad div\,\bar{\mathbf{v}} = 0 \longrightarrow$ Nessuna variazione di volume

Significato fisico dei termini extradiagonali del tensore $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$





$$\bar{\boldsymbol{v}}_0 = u\,\bar{\boldsymbol{i}} + v\,\bar{\boldsymbol{j}} + w\,\bar{\boldsymbol{k}}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}_P = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\bar{\boldsymbol{i}} + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\bar{\boldsymbol{j}} + \left(w + \frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\bar{\boldsymbol{k}}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}_R = \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\bar{\boldsymbol{i}} + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\bar{\boldsymbol{j}} + \left(w + \frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\bar{\boldsymbol{k}}$$

$$d\gamma_z = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}t$$

Deformazione dell'angolo retto in O'

$$\frac{d\gamma_z}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Velocità con cui avviene la deformazione angolare

I termini extradiagonali del tensore rappresentano la velocità di deformazione angolare

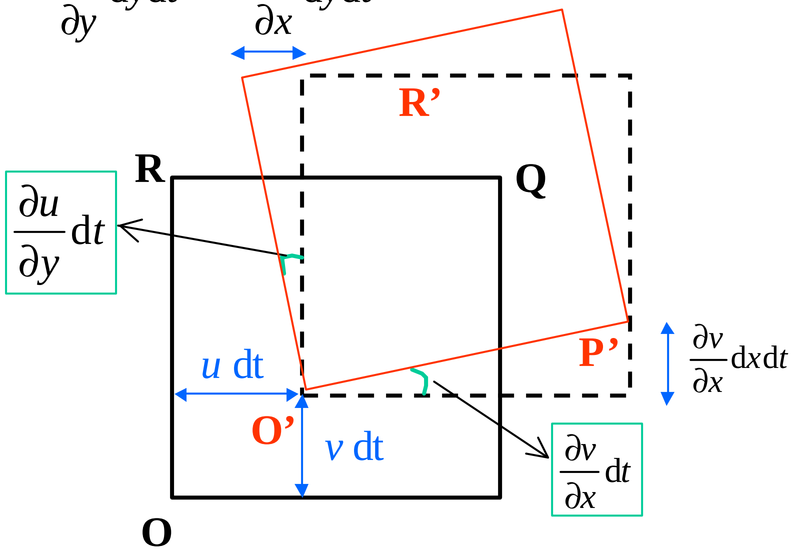
eq5

Significato fisico dei termini extradiagonali del tensore $\underline{\underline{D}}$

Caso particolare $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\gamma_z}{dt} = 0$

La rotazione avviene senza deformazione (rotazione rigida) con velocità angolare:

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy dt = -\frac{\partial v}{\partial x} dy dt$$



$$\omega = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx dt}{dx dt} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

1) La velocità di deformazione angolare è il doppio dei termini extradiagonali del tensore $\underline{\underline{D}}$ $\qquad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)$

2) I termini non nulli di $\underline{\underline{\Omega}}$ descrivono la velocità di rotazione rigida dell'elemento fluido $\qquad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

In definitiva

$$\bar{\boldsymbol{v}}\left(\bar{\boldsymbol{x}}\right) = \bar{\boldsymbol{v}}\left(\bar{\boldsymbol{x}}_0\right) + \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\underline{\mathrm{W}}}\left(\bar{\boldsymbol{x}}_0\right) + \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}\left(\bar{\boldsymbol{x}}_0\right)$$

Ma:

$$\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\underline{\mathrm{O}}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{dz}\right]\bar{\boldsymbol{i}} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathrm{dz}\right]\bar{\boldsymbol{j}} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\right]\bar{\boldsymbol{k}}$$

$$\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\Omega}}} = \frac{1}{2} rot\,\bar{\boldsymbol{v}} \times \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}\left(\bar{\boldsymbol{x}}\right) = \bar{\boldsymbol{v}}\left(\bar{\boldsymbol{x}}_0\right) + \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}\left(\bar{\boldsymbol{x}}_0\right) + \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\bar{\boldsymbol{v}} \times \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}}$$

Analisi deformazioni del fluido

$\bar{\boldsymbol{v}}\left(\bar{\boldsymbol{x}}_0\right)$ è la componente del vettore velocità che da luogo ad una traslazione rigida

$\frac{1}{2} rot\bar{\boldsymbol{v}} \times \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}}$ è la componente del vettore velocità che da luogo ad una rotazione rigida con velocità angolare

$$\bar{\varpi} = \frac{1}{2} rot\bar{\boldsymbol{v}}$$

Il tensore $\underline{\underline{\mathrm{W}}}$ viene detto tensore delle ***velocità di rotazione rigide***

$\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}\left(\bar{\boldsymbol{x}}_0\right)$ è la componente del vettore velocità che da luogo ad una deformazione locale. Il tensore $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ viene detto tensore delle ***velocità di deformazione***

L'elemento fluido nel suo moto subisce una traslazione, una rotazione rigida ed una deformazione

Fluido Newtoniano isotropo

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} & \Phi_{yz} \\ \Phi_{zx} & \Phi_{zy} & \Phi_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{F}} = p\,\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ in statica

$$\underline{\underline{F}} \begin{cases} \text{Stato di deformazione locale} \\ \text{Storia passata del fluido} \\ \textbf{Velocità della deformazione locale} \end{cases}$$

1. Fenomeni in cui il ricordo degli stati di sollecitazione interna si estinguono rapidamente (si svolgono in durate maggiori della memoria)

2. Sforzi indipendenti dalle deformazioni

$\Rightarrow$

$$\underline{\underline{F}} = f\,(\underline{\underline{\mathbf{D}}})$$

$$\underline{\underline{F}} = p\,\underline{\underline{\mathbf{I}}}$$

Fluido Stokesiano

Fluido Newtoniano isotropo

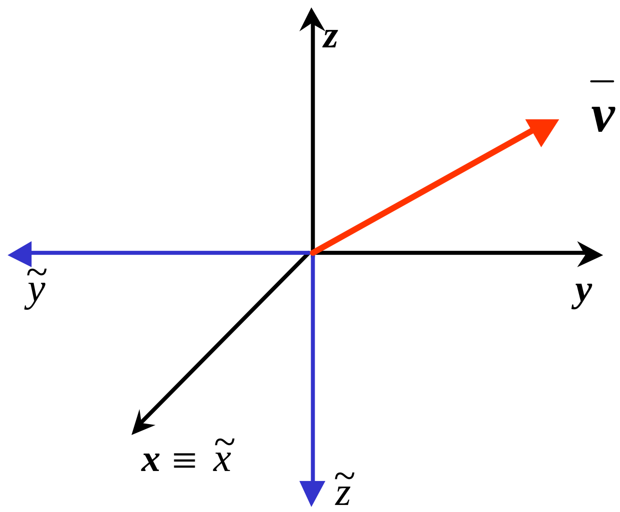
Terna di riferimento in modo tale che $\underline{\underline{\mathrm{D}}}$ sia diagonale

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{D}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{D}_{zz} \end{bmatrix}$$

Anche $\underline{\underline{\mathrm{F}}}$ deve assumere forma diagonale.

Infatti: rotazione rigida attorno all'asse x

$$\tilde{x} = x \quad \tilde{y} = -y \quad \tilde{z} = -z$$



$$u = \tilde{u}$$
$$v = -\tilde{v}$$
$$w = -\tilde{w}$$

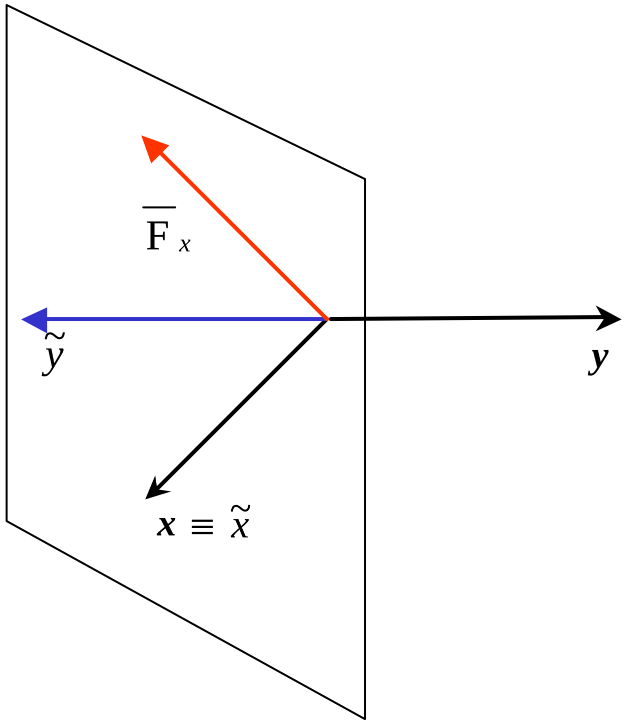
$$\mathrm{D}_{\tilde{x}\tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{D}_{xx}$$

$$\mathrm{D}_{\tilde{y}\tilde{y}} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial (-v)}{\partial (-y)} = \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{D}_{yy}$$

$$\mathrm{D}_{\tilde{z}\tilde{z}} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial (-w)}{\partial (-z)} = \frac{\partial w}{\partial z} = \mathrm{D}_{zz}$$

Nel nuovo sistema di riferimento $\underline{\underline{\mathrm{D}}}$ è ancora diagonale e presenta le medesime componenti

Fluido Newtoniano isotropo



$$\Phi_{xy} = -\Phi_{\tilde{x}\tilde{y}}$$

$$\Phi_{xy} = f\left(D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}\right)$$
$$\Phi_{\tilde{x}\tilde{y}} = f\left(D_{\tilde{x}\tilde{x}}, D_{\tilde{y}\tilde{y}}, D_{\tilde{z}\tilde{z}}\right)$$

Le componenti del tensore sono identiche ed il legame funzionale non dipende dall'orientamento degli assi

$$\Phi_{xy} = \Phi_{\tilde{x}\tilde{y}}$$

$$\Phi_{xy} = \Phi_{\tilde{x}\tilde{y}} = 0$$

Fluido Newtoniano isotropo

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}}_{\text{Parte statica}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z - p \end{bmatrix}}_{\text{Tensore DEVIATORE DEGLI SFORZI (originato dal moto)}}$$

Legame lineare fra $\underline{\underline{F}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ → **Fluido Newtoniano**

↓

Forma più generale di legame lineare

$$s_x - p = m_{xx} D_{xx} + m_{xy} D_{yy} + m_{xz} D_{zz}$$

$$s_y - p = m_{yx} D_{xx} + m_{yy} D_{yy} + m_{yz} D_{zz}$$

$$s_z - p = m_{zx} D_{xx} + m_{zy} D_{yy} + m_{zz} D_{zz}$$

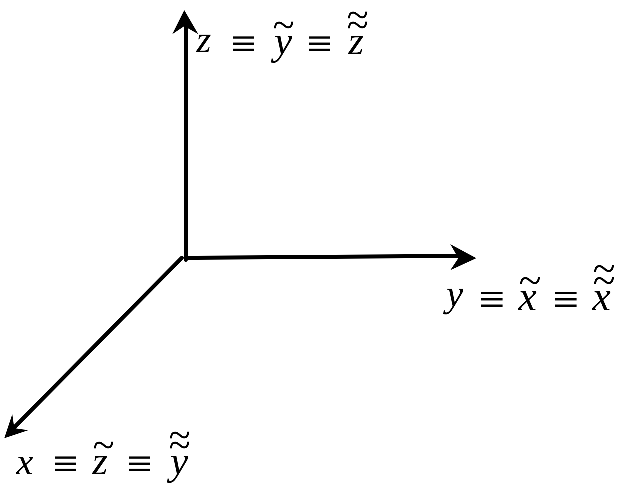
Fluido Newtoniano isotropo

I coefficienti μ_{ij} non sono tutti distinti, infatti cambiando 2 volte sistema di riferimento

$$\tilde{x} = y \quad \tilde{y} = z \quad \tilde{z} = x$$
$$\tilde{\tilde{x}} = y \quad \tilde{\tilde{y}} = x \quad \tilde{\tilde{z}} = z$$

E' cambiato solo il nome degli assi

Mutano le componenti di $\underline{\underline{F}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ ma non i loro valori



$$D_{xx} = D_{\tilde{z}\tilde{z}} = D_{\tilde{\tilde{y}}\tilde{\tilde{y}}} \qquad \sigma_x = \sigma_{\tilde{z}} = \sigma_{\tilde{\tilde{y}}}$$
$$D_{yy} = D_{\tilde{x}\tilde{x}} = D_{\tilde{\tilde{x}}\tilde{\tilde{x}}} \qquad \sigma_y = \sigma_{\tilde{x}} = \sigma_{\tilde{\tilde{x}}}$$
$$D_{zz} = D_{\tilde{y}\tilde{y}} = D_{\tilde{\tilde{z}}\tilde{\tilde{z}}} \qquad \sigma_z = \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{\tilde{\tilde{z}}}$$

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_{zz} = -\mu' - 2\mu$$

convenzionalmente

$$\mu_{xy} = \mu_{xz} = \mu_{yx} = \mu_{yz} = \mu_{zx} = \mu_{zy} = -\mu'$$

Fluido Newtoniano isotropo

Possiamo quindi scrivere

$$\sigma_x - p = -(\mu' + 2\mu) D_{xx} - \mu' D_{yy} - \mu' D_{zz} = -\mu' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu\, D_{xx}$$

$$\sigma_y - p = -\mu' D_{xx} - (\mu' + 2\mu) D_{yy} - \mu' D_{zz} = -\mu' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu\, D_{yy}$$

$$\sigma_z - p = -\mu' D_{xx} - \mu' D_{yy} - (\mu' + 2\mu) D_{zz} = -\mu' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu\, D_{zz}$$

$$\underline{\underline{f}} = p\, \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \mu' \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{v}}\, \underline{\underline{\mathbf{I}}} - 2\mu\, \underline{\underline{\mathbf{D}}}$$

$$\underline{\underline{f}} = \left(p - \mu' \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{v}} \right) \underline{\underline{\mathbf{I}}} - 2\mu\, \underline{\underline{\mathbf{D}}}$$

Equazione costitutiva dei fluidi Newtoniani

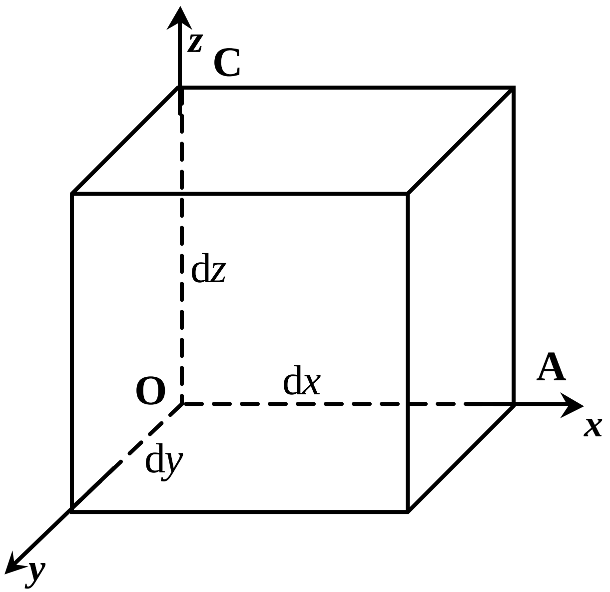
valida per qualunque terna di riferimento

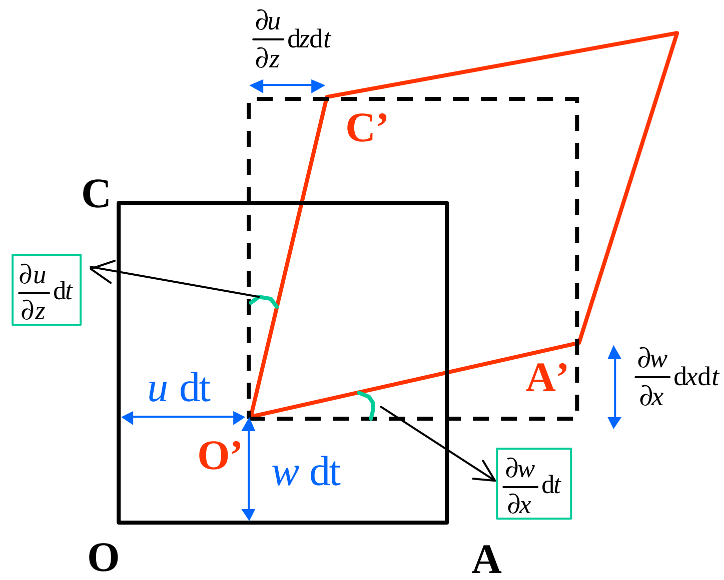
Significato fisico di m

$$\phi_{xz} = \tau_y = -2\mu\, D_{xz} = -2\mu \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \mu \frac{d\gamma_y}{dt}$$

≡ Legge di Newton

μ ≡ viscosità dinamica





$$\bar{\boldsymbol{v}}_0(t=t_0) = u\,\bar{\boldsymbol{i}} + v\,\bar{\boldsymbol{j}} + w\,\bar{\boldsymbol{k}}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}_A(t=t_0) = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\bar{\boldsymbol{i}} + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\bar{\boldsymbol{j}} + \left(w + \frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\bar{\boldsymbol{k}}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}_C(t=t_0) = \left(u + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\bar{\boldsymbol{i}} + \left(v + \frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\bar{\boldsymbol{j}} + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\bar{\boldsymbol{k}}$$

$$\frac{d\gamma_y}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

eq15

Significato fisico di m’

Esplicitiamo le componenti normali di sforzo

$$\sigma_x = p - \mu' \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{v}} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = p - \mu' \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{v}} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_z = p - \mu' \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{v}} - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{\text{invariante}} = 3p$$

$$s_x + s_y + s_z = 3p - 3m' \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{v}} - 2m\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\left(\mu' + \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{v}} = 0$$

1) $\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{v}} = 0$ fluido incomprimibile

2) $\mu' = -\frac{2}{3}\mu$ Hp. di Stokes

μ: responsabile di dissipazioni energetiche in un fluido isotermo che subisce deformazioni angolari

μ’: legato a variazioni di volume

Equazione di moto del fluidi Newtoniani

$$\begin{cases} \rho \cdot \left(\overline{F} - \overline{A}\right) = \dfrac{\partial \overline{\Phi}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{\Phi}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{\Phi}_z}{\partial z} = \operatorname{div} \underline{\underline{\mathbf{F}}} \\ \underline{\underline{\mathrm{F}}} = \left(\mathrm{p} + \dfrac{2}{3}\mu \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{v}}\right) \underline{\underline{\mathbf{I}}} - 2\mu\, \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{cases}$$

Eq. dei Momenti

Eq. Reologica
(legame sforzi deformazioni)

$$\boxed{\rho \cdot \left(\overline{F} - \overline{A}\right) = \operatorname{div}\left[\left(\mathrm{p} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{v}}\right) \underline{\underline{\mathbf{I}}} - 2\mu\, \underline{\underline{\mathbf{D}}}\right]}$$

$$\operatorname{div}\left[\mathrm{p}\, \underline{\underline{\mathbf{I}}}\right] = \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x}\overline{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial y}\overline{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial z}\overline{\boldsymbol{k}} = \operatorname{grad}(\mathrm{p})$$

$$\operatorname{div}\left[\frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{v}}\, \underline{\underline{\mathbf{I}}}\right] = \frac{2}{3}\operatorname{grad}\left(\mu \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{v}}\right) = \frac{2}{3}\mu \operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{v}}\right)$$

se μ uniforme

Equazione di moto del fluidi Newtoniani

$$\mathrm{div}\left[-2\mu\,\underline{\underline{\mathbf{D}}}\right]=-2\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\,\bar{\boldsymbol{i}}+D_{xy}\,\bar{\boldsymbol{j}}+D_{xz}\,\bar{\boldsymbol{k}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yx}\,\bar{\boldsymbol{i}}+D_{yy}\,\bar{\boldsymbol{j}}+D_{yz}\,\bar{\boldsymbol{k}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zx}\,\bar{\boldsymbol{i}}+D_{zy}\,\bar{\boldsymbol{j}}+D_{zz}\,\bar{\boldsymbol{k}}\right)\right]$$

Sviluppiamo le componenti, ad esempio in direzione *x* si ottiene:

$$\left\{\mathrm{div}\left[-2\mu\,\underline{\underline{\mathbf{D}}}\right]\right\}_x=-2\mu\left[\frac{\partial D_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial D_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial D_{zx}}{\partial z}\right]$$

$$=-2\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)\right]$$

se μ unifome

$$=-2\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right]$$

$$=-2\mu\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right]$$

$$=-\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]-\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right]$$

$$=-\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]-\mu\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\,\bar{\boldsymbol{v}}$$

Equazione di moto del fluidi Newtoniani

Analogamente lungo le direzioni y e z si ottiene rispettivamente:

$$\left\{ \mathrm{div}\left[-2\mu\,\underline{\underline{\mathbf{D}}}\right]\right\}_y = -\mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]-\mu\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{div}\;\bar{\boldsymbol{v}}$$

$$\left\{ \mathrm{div}\left[-2\mu\,\underline{\underline{\mathbf{D}}}\right]\right\}_z = -\mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]-\mu\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\;\bar{\boldsymbol{v}}$$

In definitiva:

$$\mathrm{div}\left[-2\mu\,\underline{\underline{\mathbf{D}}}\right] = -\mu\nabla^2\bar{\boldsymbol{v}}-\mu\,\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\;\bar{\boldsymbol{v}}\right)$$

Laplaciano

Sostituendo:

$$\rho\cdot\left(\bar{F}-\bar{A}\right)=\mathrm{grad}\;\mathrm{p}+\frac{2}{3}\mu\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\;\bar{\boldsymbol{v}}\right)-\mu\nabla^2\bar{\boldsymbol{v}}-\mu\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\;\bar{\boldsymbol{v}}\right)$$

$$\boxed{\rho\cdot\left(\bar{F}-\bar{A}\right)=\mathrm{grad}\;\mathrm{p}-\frac{1}{3}\mu\;\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\;\bar{\boldsymbol{v}}\right)-\mu\nabla^2\bar{\boldsymbol{v}}}$$

Eq. Momenti + reologica

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}}+\rho\mathrm{div}\;\bar{\boldsymbol{v}}=0$$

Eq. di Continuità

Eq. di Stato + Condizioni al contorno + Condizioni iniziali

Per fluidi incomprimibili: $\mathrm{div}\;\bar{\boldsymbol{v}}=0$

$$\boxed{\rho\cdot\left(\bar{F}-\bar{A}\right)=\mathrm{grad}\;\mathrm{p}-\mu\nabla^2\bar{\boldsymbol{v}}}$$

Eq. di Navier Stokes

Moto permanente laminare in un fluido viscoso incomprimibile (UNIFORME)

$$\rho \cdot \left(\overline{F} - \overline{A}\right) = \text{grad p} - \mu \nabla^2 \overline{\boldsymbol{v}}$$

Proiezione lungo la traiettoria:

$$\rho \cdot \left(-g \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{dv}{dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial s} - \mu \nabla^2 \, v \qquad v = \text{modulo di } \overline{\boldsymbol{v}}$$

$$\frac{dv}{dt} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}}_{\text{Moto permanente}} + v \underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial s}}}_{\text{Moto uniforme}} \Rightarrow -\gamma \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial s} - \mu \left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}}}_{\text{Moto uniforme}} + \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} \right)$$

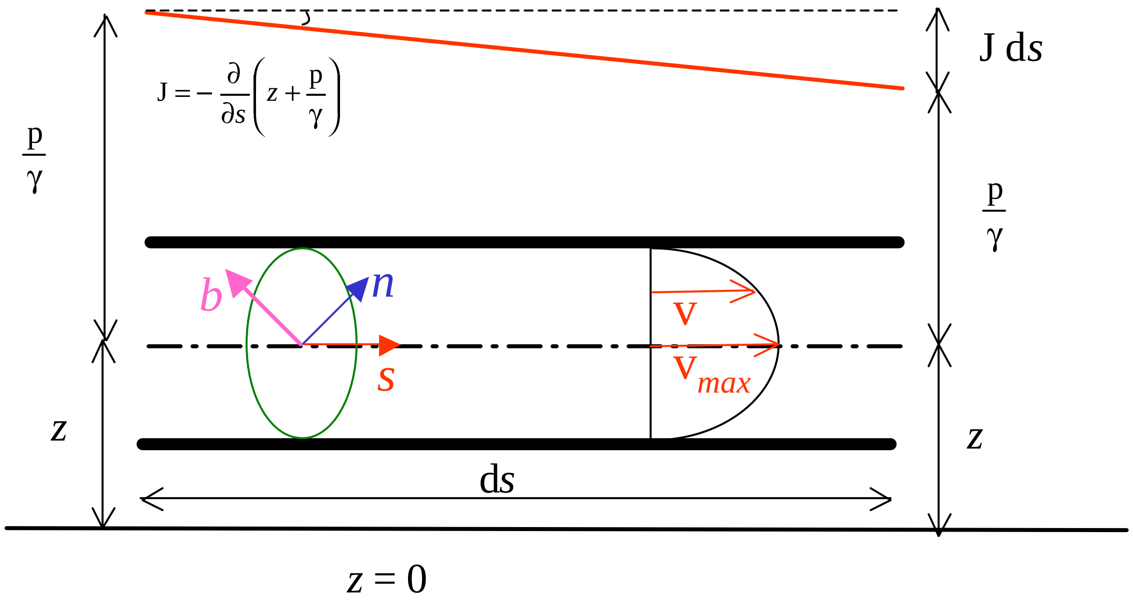
$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = \frac{\mu}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} \right) < 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma} \right)}_{\text{Variazione di carico piezometrico}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right)}_{\text{Variazione di carico totale}}$$

Per l'ammessa uniformità lungo la traiettoria

Tale variazione è nel senso di una diminuzione dell'energia meccanica

Moto permanente laminare in un fluido viscoso incomprimibile (UNIFORME)

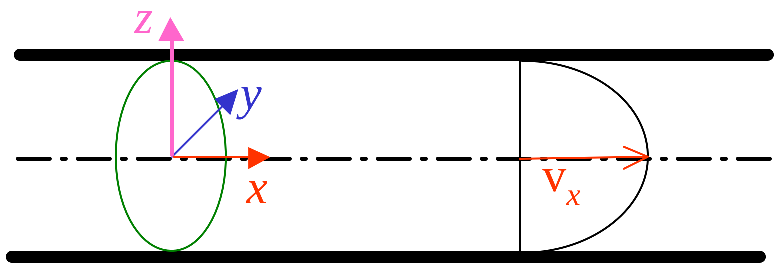


$$J = \text{costante lungo la traiettoria} = -\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{\mu}{\gamma}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial b^2}\right)$$

Integrando $\int_0^s \frac{\partial H}{\partial s}\, ds = -\int_0^s J\, ds$

Si ottiene l'equazione del moto in termini finiti $H(s) - H(0) = -J \cdot s$

Moto permanente in tubi cilindrici



Moto permanente

ρ, μ uniformi e stazionarie

x: direzione e moto ≡ velocità

Eq. di continuità $\quad \mathrm{div}\,\bar{\boldsymbol{v}} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \mathrm{v}_x = f(y, z)$

Eq. di Navier Stokes $\quad \rho \bar{F} - \mathrm{grad}\,\mathrm{p} + \mu \nabla^2 \bar{\boldsymbol{v}} = \rho \dfrac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t}$

Proietto lungo le coordinate x,y,z

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho g z + p) + \mu \nabla^2 \mathrm{v}_x = 0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial y}(\rho g z + p) = 0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial z}(\rho g z + p) = 0 \end{cases}$$

Dalle ultime due equazioni si evidenzia che il carico piezometrico h definito come

$$h = z + \frac{\mathrm{p}}{\gamma}$$

È uniforme su ogni piano ortogonale all'asse x

La pressione varia con legge idrostatica lungo ogni sezione trasversale della condotta

Moto permanente in tubi cilindrici

Il carico piezometrico varia lungo x in accordo con la proiezione lungo l'asse x dell'equazione di Navier Stokes

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)+\frac{\mu}{\gamma}\nabla^2 \mathrm{v}_x = 0$$

Come v_x anche $\nabla^2 \mathrm{v}_x$ è indipendente da x ⇒ La variazione di carico piezometrico è uniforme con x

Detto: $$\mathrm{J} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)$$ ⇒ J è costante lungo la condotta

Per determinare la distribuzione della velocità longitudinale v_x su ciascuna sezione trasversale bisogna integrare l'equazione

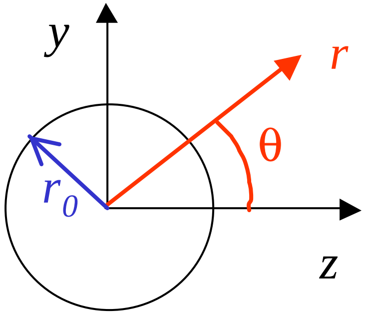
$$\nabla^2 \mathrm{v}_x = -\frac{\gamma}{\mu}\mathrm{J}$$ Eq. di Poisson

Necessarie: la forma della sezione trasversale

le condizioni cinematiche al contorno

Moto permanente in tubi cilindrici a sezione circolare

Conviene ricorrere alle coordinate cilindriche



$$\nabla^2 v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial q^2} = -\frac{g}{m} J$$

Integrando con la condizione al contorno $v_x = 0$ per $r = r_0$

Si ottiene $v_x = \frac{\gamma}{4\mu} J \left(r_0^2 - r^2 \right)$ $\qquad v_{x\,max} = \frac{\gamma}{4\mu} J\, r_0^2$ sull'asse

$$Q = \int_0^{r_0} 2\pi r v_x \mathrm{d}r = \frac{\gamma}{128\mu} J\, \pi\, D^4$$

Formula di Pouseuille

$$V = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\gamma}{32\mu} J\, D^2 = \frac{1}{2} v_{x\,max}$$

velocità media

$$\tau_0 = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial r} \right]_{r=r_0} = \frac{\gamma}{2} J r_0$$

Sforzo tangenziale alla parete