



Prof. Alberto Guadagnini - Prof. Monica Riva

Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento (DIAR)

Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci, 32, 20133 Milano- Italy

Equazioni fondamentali dei fluidi reali

Note del Corso di *Meccanica dei Fluidi*

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica - Facoltà di Milano Bovisa

Sezioni A & B

A.A. 2001 / 2002

Equazioni fondamentali dei fluidi reali

⇒ teorema di Bernoulli \leftrightarrow 1° Principio della Termodinamica

⇒ modello di fluido reale (equazioni reologiche)

⇒ equazioni indefinite dei fluidi reali (Navier-Stokes)

⇒ equazioni integrali dei fluidi reali

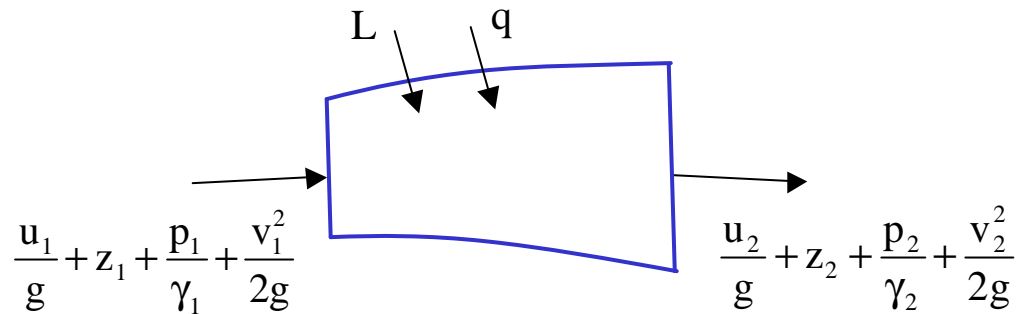
⇒ calcolo della J in un condotto: soluzione analitica (laminare)

⇒ moto turbolento: esperienza di Reynolds

⇒ equazioni di Reynolds (integrali)

⇒ sforzi di Reynolds \rightarrow perdite di carico

Teorema di Bernoulli \hat{U} 1° principio della Termodinamica



u = energia interna per unità di peso

L = lavoro meccanico per unità di peso

q = calore per unità di peso

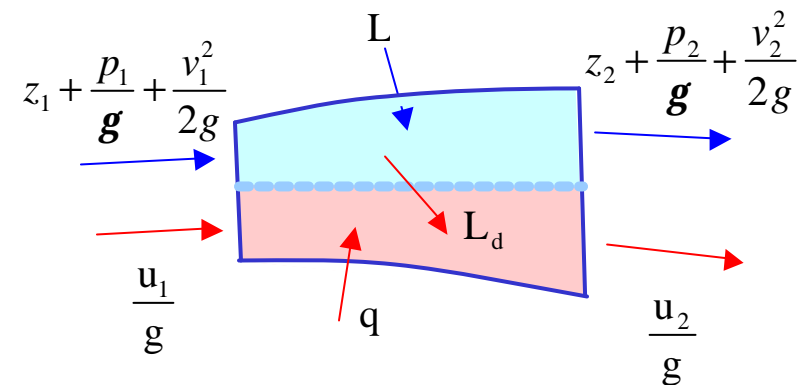
($u + p/\rho$ = entalpia)

$$\frac{u_1}{g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1} + \frac{v_1^2}{2g} + L + q = \frac{u_2}{g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2} + \frac{v_2^2}{2g}$$

1° PT sistema aperto

$r = \text{cost} (g_1 = g_2 = g)$

$$\begin{cases} z_1 + \frac{p_1}{g} + \frac{v_1^2}{2g} + L = z_2 + \frac{p_2}{g} + \frac{v_2^2}{2g} + L_d \\ \frac{u_1}{g} + q + L_d = \frac{u_2}{g} \end{cases}$$



L_d = lavoro per unità di peso delle forze dissipative = calore per unità di peso prodotto dalle dissipazioni (aumento di entropia)

$\rho = \text{cost}$
 $F = g$
 $\partial / \partial t = 0$

corrente
lineare

$$\rho (\vec{F} - \vec{a}) = \text{grad}(p)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) = 0$$

estensione

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) = -J$$

+ perdite concentrate
+ macchine

$\tau = 0$

$$\rho (\vec{F} - \vec{a}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

J = ???

perdite concentrate = ???

$\rho = \text{cost}$
 $F = g$
 $\partial / \partial t = 0$

corrente
 lineare

$$\rho (\vec{F} - \vec{a}) = \text{grad}(p)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) = 0$$

$\tau = 0$

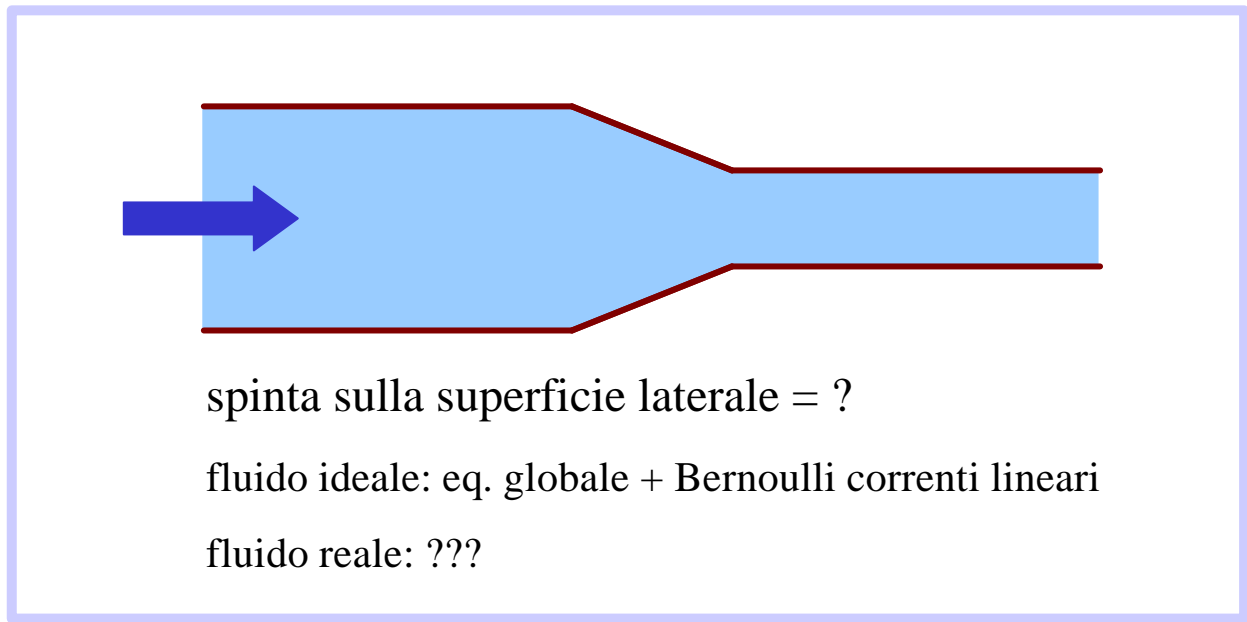
estensione

$$\rho (\vec{F} - \vec{a}) = \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\Phi}_z}{\partial z}$$


$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) = -J$$

+ perdite concentrate
 + macchine

$$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{M} + \vec{I} = 0$$



modello di fluido reale: devo esplicitare il legame sforzi – velocità di deformazione (equazioni reologiche)

legge di Newton: $\tau = \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial n}$  generalizzare a campi tridimensionali:
 $\underline{\underline{\Phi}} = f(\text{campo velocità, proprietà fluido})$



$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{\underline{\mathbf{v}}} \right) \underline{\underline{\mathbf{I}}} - 2\mu \underline{\underline{\mathbf{D}}}$$

**Equazione
Reologica**

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

tensore delle velocità di deformazione

Equazione di moto dei fluidi Newtoniani : forma indefinita

$$\rho \bar{F} - \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \rho \left(u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \bar{v} \quad + \quad \text{div}(\bar{v}) = 0$$

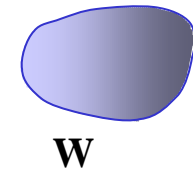
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \text{viscosità cinematica}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

sistema di **4 eqq.** differenziali alle derivate parziali nello spazio e nel tempo per le **4 incognite** (u, v, w, p)

Equazione di moto dei fluidi Newtoniani incomprimibili : forma integrale

$$\underbrace{\int_W \rho \cdot \bar{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{W}}_{\vec{G}} + \underbrace{\int_A \bar{\Phi}_n \cdot d\mathbf{A}}_{\bar{\Pi}} + \underbrace{\int_A \rho \cdot \mathbf{v}_n \cdot \bar{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{A}}_{\vec{M}} - \underbrace{\int_W \frac{\partial(\rho \cdot \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} \cdot d\mathbf{W}}_{\vec{I}} = 0$$

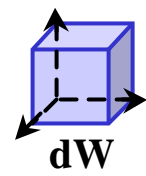


$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} \right) \underline{\underline{\mathbf{I}}} - 2\mu \underline{\underline{\mathbf{D}}}$$

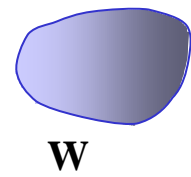
$$\int_A \bar{\Phi}_n \cdot d\mathbf{A} = \int_A p \cdot \bar{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{A} - \int_A \mu \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial n} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_p + \bar{\Pi}_\mu$$

sull'elementino dA:
 $d\Pi_p \rightarrow$ normale
 $d\Pi_\mu \rightarrow$ normale + tangenziale



$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \right) - \rho \bar{\mathbf{F}} + \operatorname{grad}(p) - \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}} = 0$$



$$\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{G}} + \bar{\Pi}_p + \bar{\Pi}_\mu = 0$$

$\rho = \text{cost}$
 $F = g$
 $\partial / \partial t = 0$

corrente
 lineare

$$\rho (\vec{F} - \vec{a}) = \text{grad}(p) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) = 0$$

estensione

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) = -J$$

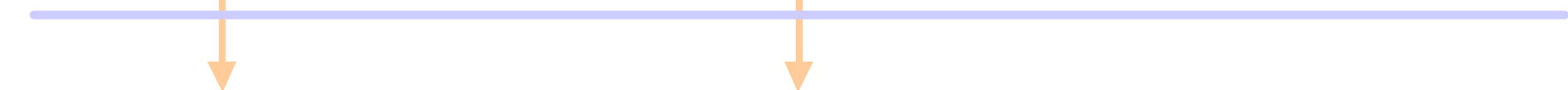
+ perdite concentrate
 + macchine

$\tau = 0$

$$\rho (\vec{F} - \vec{a}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

legame sforzi – velocità di
 deformazione + $\rho = \text{cost}$

$$\rho \cdot (\vec{F} - \vec{a}) = \text{grad}(p) - \mu \left(\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \right)$$



$$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{M} + \vec{I} = 0$$

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_\mu + \vec{M} + \vec{I} = 0$$

legame sforzi – velocità di
 deformazione + $\rho = \text{cost}$

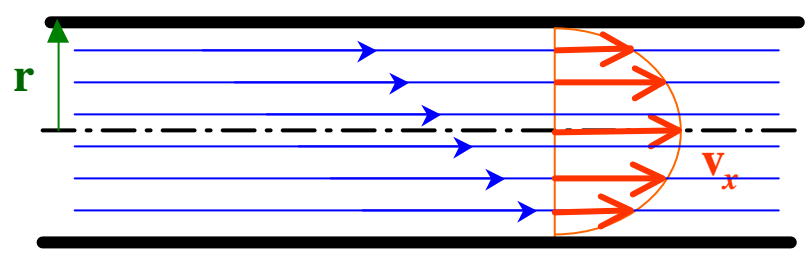
$$\vec{\Pi}_p = \int p \vec{n} \, dA$$

$$\vec{\Pi}_\mu = - \int \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \, dA$$

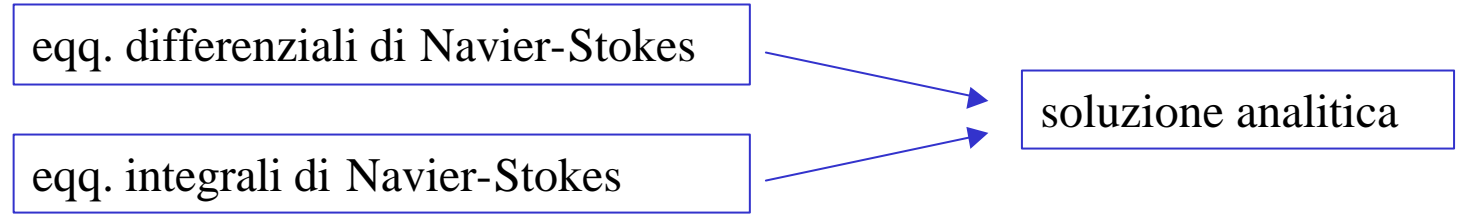
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

- In generale **non** esistono **soluzioni analitiche** per le equazioni di Navier-Stokes
- Alcune soluzioni analitiche per geometrie semplici

Esempio: moto uniforme in tubo cilindrico circolare \mathcal{P} \mathcal{J} !!!



$$\vec{v}(x, y, z) \longrightarrow \begin{cases} v_x = v_x(r) \\ v_y \equiv 0 \\ v_z \equiv 0 \end{cases}$$



legame sforzi tangenziali « J : tronco di corrente cilindrica, moto uniforme (permanente)

equilibrio in direzione del moto:

$$\Pi_{n1} + \cancel{M_1} = \Pi_{n2} + \cancel{M_2} + T_o + G \sin\alpha = 0$$

$$\Pi_{n1} = \Pi_{p1} + \Pi_{\mu 1} \quad \Pi_{n2} = \dots$$

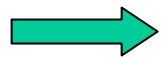
$$\left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \right|_{A1} = \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \right|_{A1} = 0 \Rightarrow \vec{\Pi}_{\mu 1} = \int_{A1} \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA = 0$$

$$\Rightarrow A p_1 = A p_2 + T_o + G \sin\alpha$$

$$p_1/\gamma = p_2/\gamma + J L + \underbrace{(z_2 - z_1)}_{L \sin\alpha}$$

$$G = \gamma A L$$

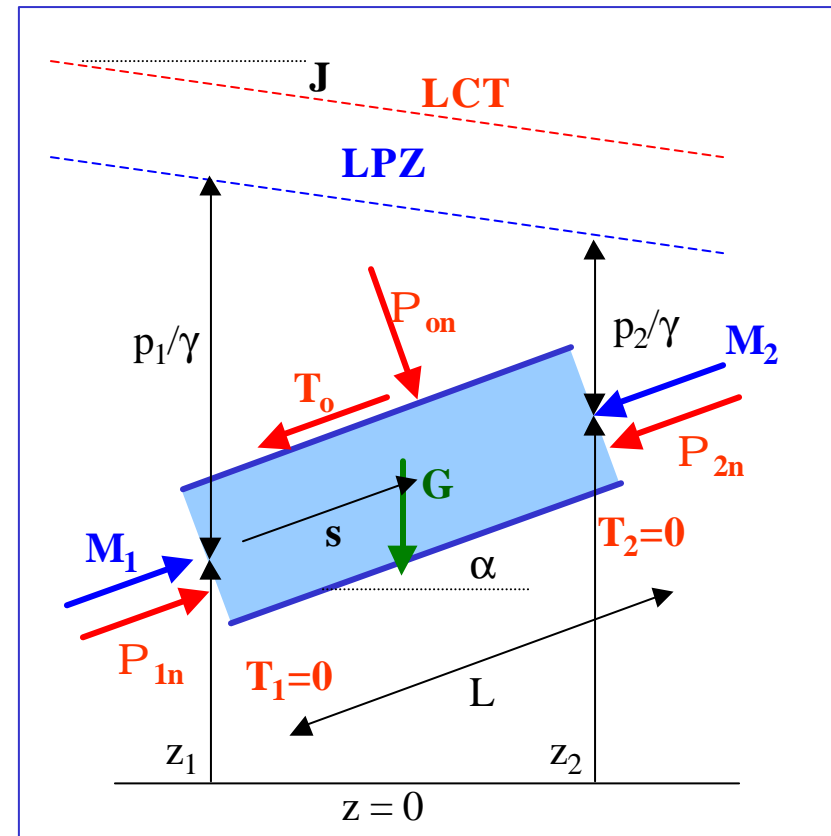
$$\Rightarrow A \gamma (J L + \cancel{L \sin\alpha}) = T_o + \cancel{\gamma A L \sin\alpha}$$



$$T_o = g A L J = g W J$$

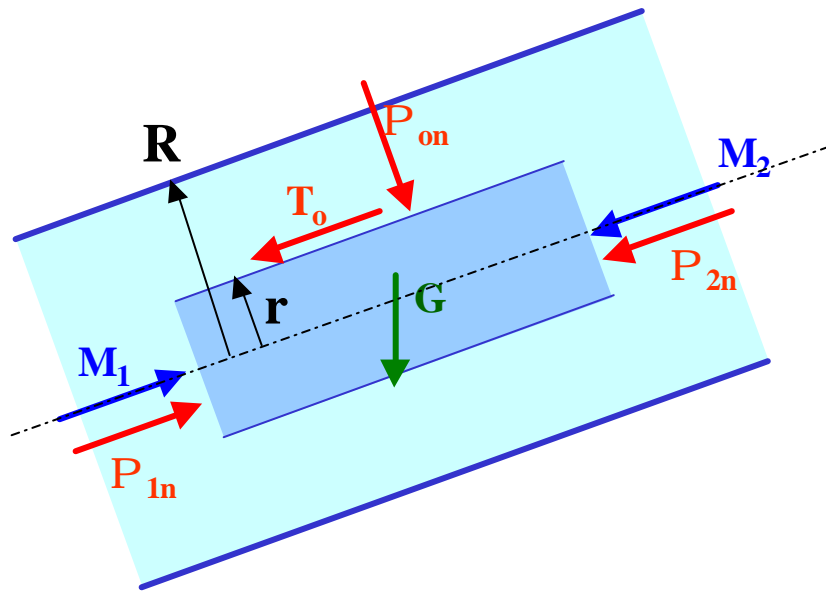
$$t_o = g W/A_o J = g R J$$

$$J = f(t) \quad \bar{P} \quad J \mu t$$



R = raggio idraulico = A/P
 condotta circolare: $R = R/2$

P = perimetro



dimostrazione precedente, applicata ad una porzione della corrente (cilindro di raggio r)

corrente lineare uniforme \rightarrow medesima J per la corrente intera e per il cilindro interno, indipendentemente dal valore di r

$$\rightarrow T_o = g W J$$

$$T_o = \int_{A_o} \mu \frac{\partial v}{\partial n} dA = - \int_{A_o} \mu \frac{\partial v}{\partial r} dA = -\mu \frac{\partial v}{\partial r} A_o$$

equazioni reologiche

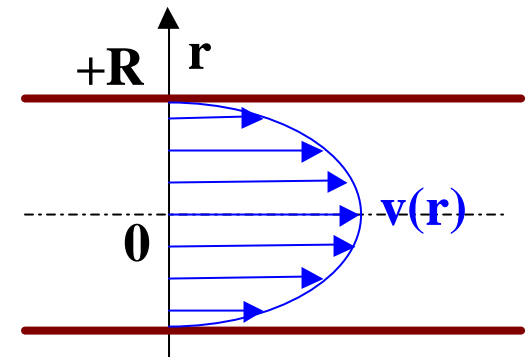
moto uniforme

$$\begin{cases} T = -\mu \cdot \frac{dv}{dr} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \\ T = \gamma \cdot W \cdot J = \gamma \cdot L \cdot A \cdot J = \gamma \cdot \pi \cdot r^2 \cdot L \cdot J \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\gamma}{2 \cdot \mu} \cdot r \cdot J$$

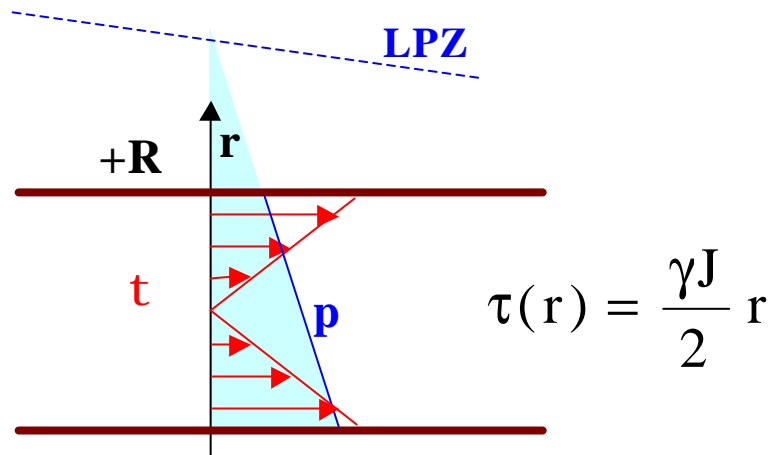
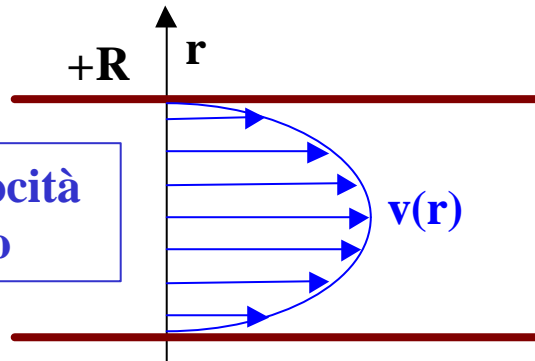
$$dv = -\frac{\gamma J}{2\mu} r dr \quad \Rightarrow \quad \int_0^v dv = -\int_R^r \frac{\gamma J}{2\mu} r dr$$

$$v(r) = \frac{\gamma J}{4\mu} (R^2 - r^2)$$



$$v(r) = \frac{\gamma J}{4\mu} (R^2 - r^2)$$

profilo di velocità
parabolico



distribuzione τ : triangolare
distribuzione p : idrostatica

$$Q = \int_A v \cdot dA = \int_0^R v(r) \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{\pi\gamma J}{8\mu} R^4$$

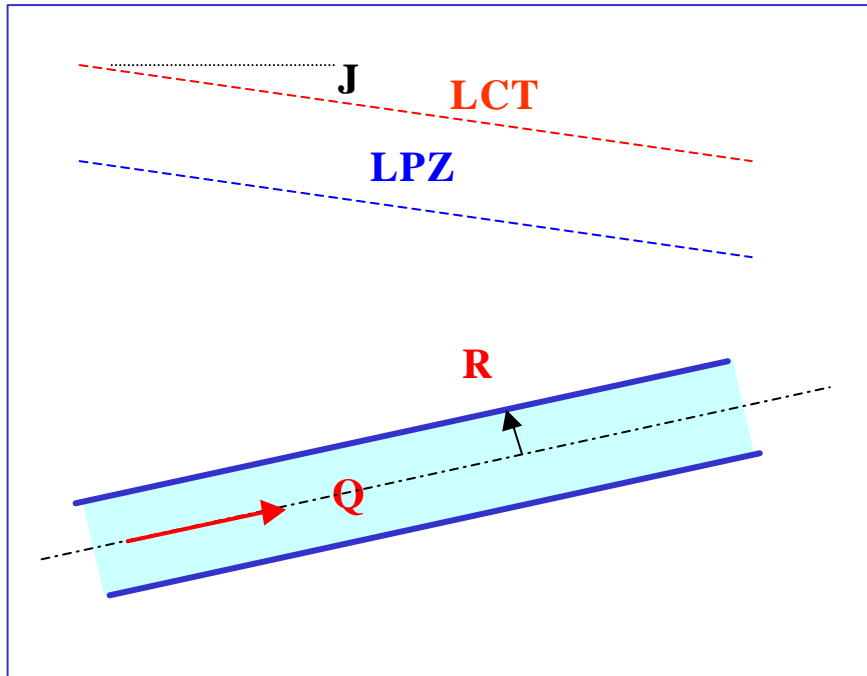
$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\gamma J}{8\mu} R^2$$

$$v_{\max} = v(r=0) = \frac{\gamma J}{4\mu} R^2 = 2 \cdot V$$

$$\alpha = \frac{\int_A v^3 \cdot dA}{V^3 A} = 2$$

$$J = \frac{8\mu V}{\gamma R^2} = f(V, R, \mu, \rho)$$

esempi di calcolo (acqua: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $\mu = 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$)



$R = 5 \text{ cm}$
 $Q = 0.1 \text{ l/s}$
 $L = 100 \text{ m}$

$R = 5 \text{ cm}$
 $Q = 10 \text{ l/s}$
 $L = 100 \text{ m}$



$V = 1.3 \text{ cm/s}$
 $J = 4 \cdot 10^{-6}$
 $\Delta H = J \cdot L = 0.4 \text{ mm}$

$V = 1.3 \text{ m/s}$
 $J = 4 \cdot 10^{-4}$
 $\Delta H = J \cdot L = 4 \text{ cm}$



verifica sperimentale:

OK

$J = 1.4 \cdot 10^{-2}$

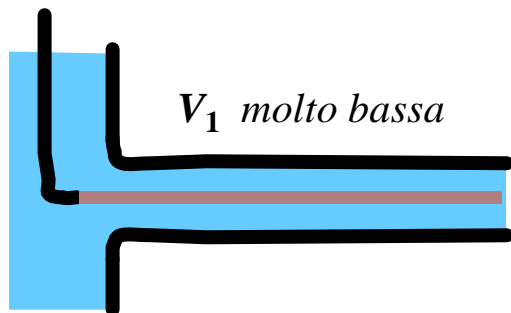
$\Delta H = J \cdot L = 1.4 \text{ m}$

???

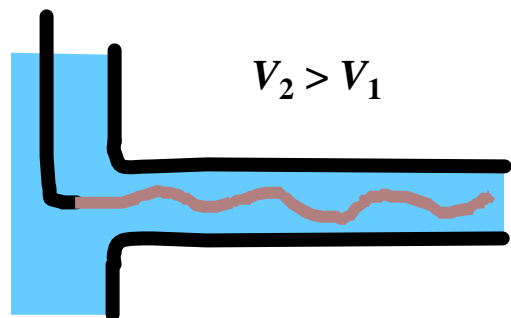
Regimi di moto : Esperienza di Reynolds

La cadente J , e quindi le perdite di carico distribuite, dipendono dalle modalità con le quali avviene il movimento del fluido. Queste modalità dipendono in generale dalle caratteristiche fisiche del fluido e della superficie di contorno e dalla velocità del fluido.

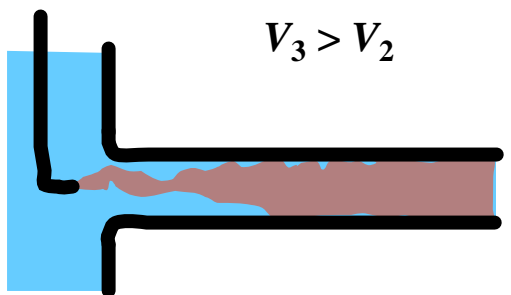
Esperimento: visualizzo il moto in un condotto con un tracciante.



MOTO LAMINARE: il movimento avviene per filetti fluidi che si mantengono paralleli alle pareti del condotto, il colorante immesso mantiene una sua traiettoria senza mescolarsi con il fluido circostante. (non avviene scambi di massa tra i filetti fluidi)

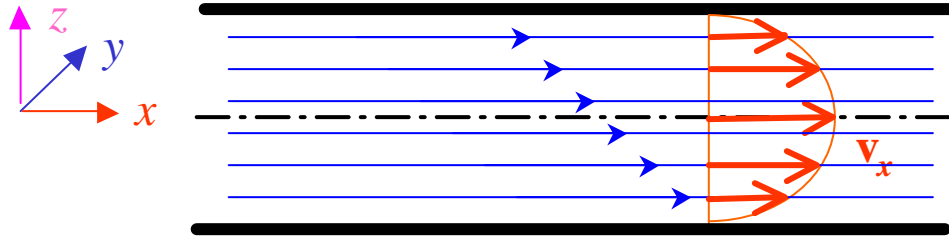


TRANSIZIONE LAMINARE-TURBOLENTA: il movimento avviene ancora per filetti fluidi, questi però all'aumentare della velocità divengono sempre più instabili, perdono il loro parallelismo con le pareti e inizia a verificarsi uno scambio di massa tra le diverse regioni del campo.



MOTO TURBOLENTO: gli scambi di massa tra le diverse regioni del campo sono prevalenti, il moto non avviene più per filetti fluidi ed il colorante si disperde subito occupando tutte le zone del campo di moto.

Moto laminare

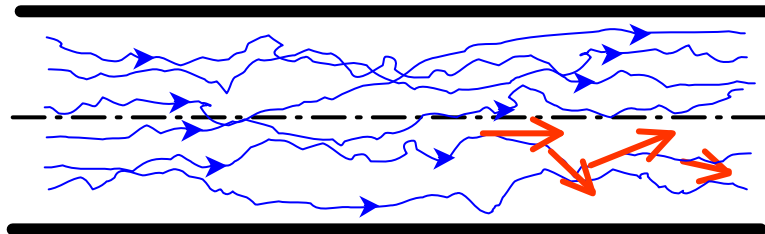


$$v_x = \frac{\gamma J}{4\mu} (R^2 - r^2)$$

$$v_y \equiv 0$$

$$v_z \equiv 0$$

Moto turbolento



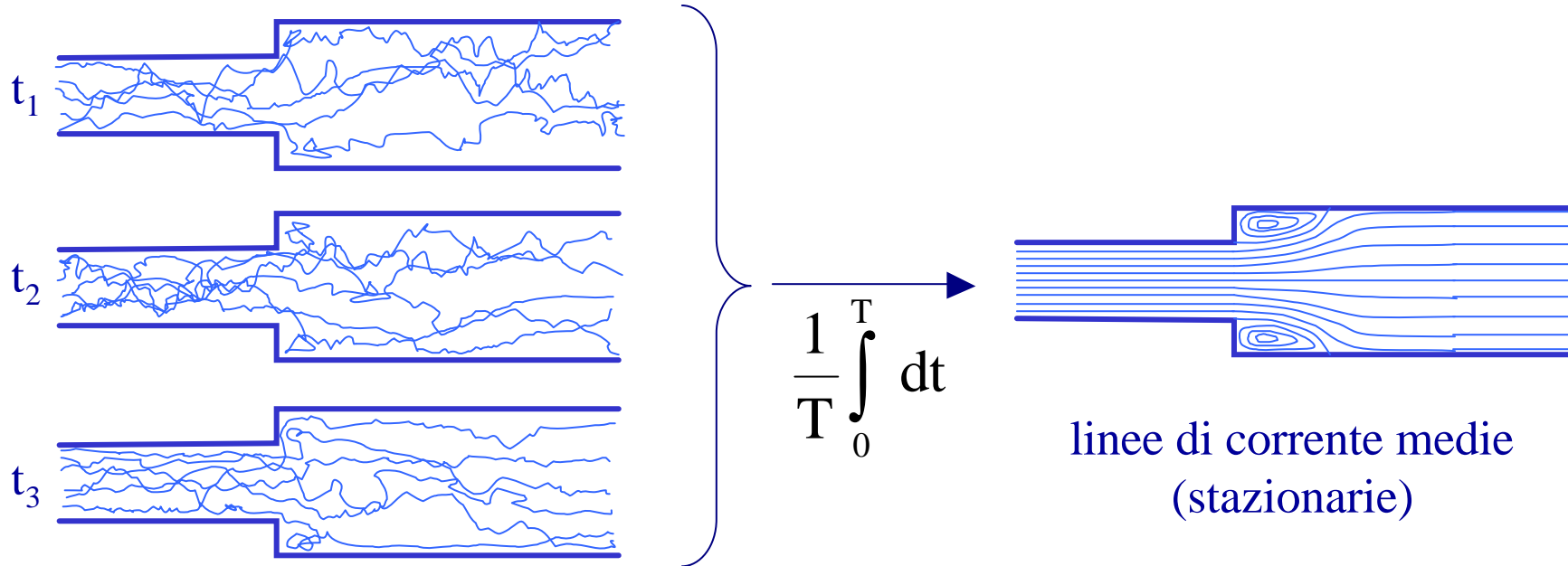
$$v_x(x, y, z, t) = ???$$

$$v_y(x, y, z, t) = ???$$

$$v_z(x, y, z, t) = ???$$

le espressioni ottenute non sono utilizzabili:

- moto non permanente
- traiettorie non rettilinee
- velocità non uniforme longitudinalmente
- componenti trasversali di velocità non nulle



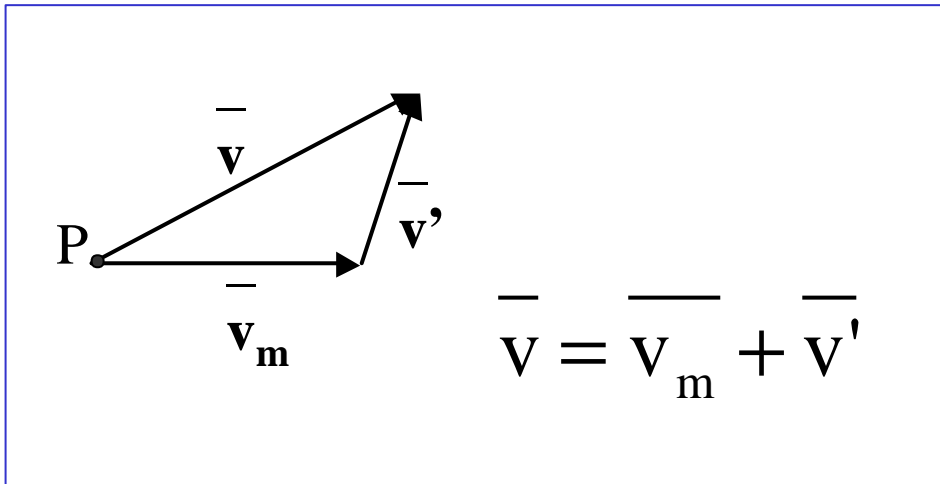
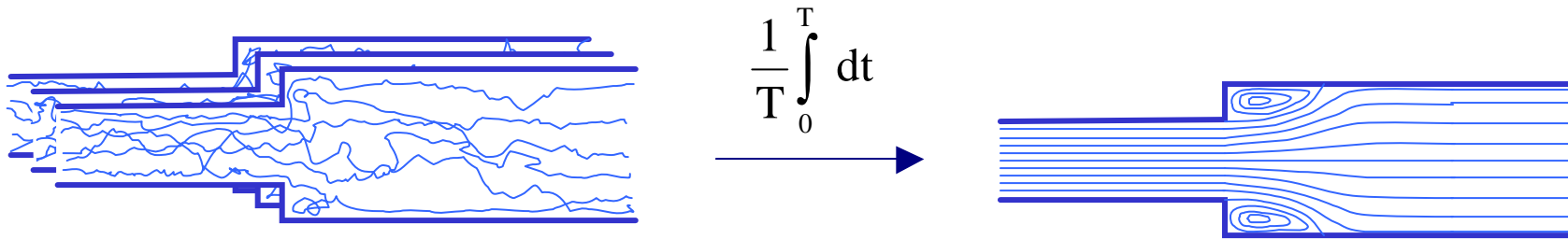
linee di corrente istantanee
(non stazionarie)

linee di corrente medie
(stazionarie)

in molte applicazioni non è richiesta la conoscenza dei valori istantanei del campo di moto, bensì dei corrispondenti valori medi (temporali)



- regolarità spaziale e temporale
- possibile stazionarietà
- possibili simmetrie:
3D → 2D → 1D



$$\bar{v}_m = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \bar{v} \cdot dt$$

$$\bar{v} = f(x, y, z, t)$$

$$\bar{v}_m = f(x, y, z, \cancel{t}) \quad \text{se moto stazionario in media}$$

$$\bar{v}_m = \cos t \quad \text{se moto uniforme in media}$$

$$\overline{v_m'} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \bar{v}' \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (\bar{v} - \bar{v}_m) \cdot dt = \bar{v}_m - \bar{v}_m = 0$$

Analogamente per sforzi ($\bar{\Phi}_n$), p , ρ

Esempio di medie temporali per funzioni lineari: azioni interne

$$\bar{\mathbf{p}} = \int_A \bar{\Phi}_n \, dA \qquad \bar{\Phi}_n = \bar{\Phi}_{n,m} + \bar{\Phi}'_n$$

$$\bar{\Pi}_m = \frac{1}{T} \cdot \int_T dt \int_A (\bar{\Phi}_{n,m} + \bar{\Phi}'_n) \cdot dA = (\text{essendo il dominio fisso}) = \int_A dA \frac{1}{T} \int_T (\bar{\Phi}_{n,m} + \bar{\Phi}'_n) dt =$$

$$= \int_A \bar{\Phi}_{n,m} \, dA + \int_A dA \cdot \underbrace{\frac{1}{T} \int_T \bar{\Phi}'_n \cdot dt}_{=0} = \int_A \bar{\Phi}_{n,m} \cdot dA \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\Pi}_m = \int_A \bar{\Phi}_{n,m} \cdot dA}$$

data la funzione (vettoriale) $\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}})$ solo se la funzione è lineare risulta:

$$\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}) \Big|_m = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}_m)$$

Esempio di medie temporali per funzioni non lineari: Flusso di quantità di moto

$$\bar{M} = \int_A \rho \cdot \bar{v} \cdot v_n \cdot dA$$

$$\bar{M}_m = \frac{1}{T} \cdot \int_T dt \cdot \int_A \rho \cdot \bar{v} \cdot v_n \cdot dA = \frac{1}{T} \cdot \int_T dt \cdot \int_A \rho \cdot (\bar{v}_m + \bar{v}') \cdot (v_{n,m} + v'_n) \cdot dA =$$

$$= \rho \cdot \int_A dA \cdot \frac{1}{T} \cdot \left\{ \int_T \bar{v}_m \cdot v_{n,m} \cdot dt + \int_T \cancel{\bar{v}_m \cdot v'_n} \cdot dt + \int_T \cancel{\bar{v}' \cdot v_{n,m}} \cdot dt + \int_T \bar{v}' \cdot v'_n \cdot dt \right\}$$

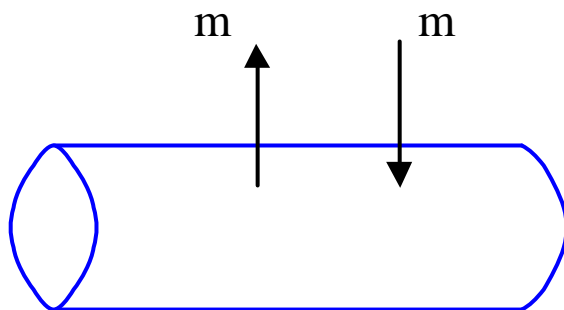
↑
incomprimibile

↗ ≠ 0

In definitiva ⇒

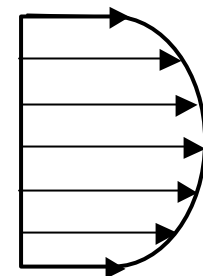
$$\bar{M}_m = \mathbf{r} \cdot \int_A \vec{v}_m \cdot v_{n,m} \cdot dA + \mathbf{r} \cdot \int_A \left(\vec{v}' \cdot v'_n \right)_m \cdot dA$$

essendo $\left(\vec{v}' \cdot v'_n \right)_m = \frac{1}{T} \cdot \int_T \bar{v}' \cdot v'_n \cdot dt$



masse uguali ma \mathbf{v} diverse

scambi di quantità di moto dovuti alla turbolenza:
 le particelle provenienti da zone più veloci aumentano
 la quantità di moto delle zone più lente e viceversa
 ⇒ appiattimento del diagramma delle velocità

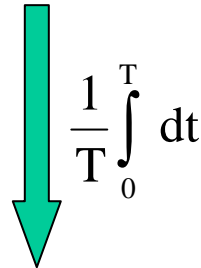
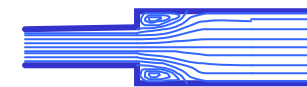


Equazione di equilibrio globale: media di Reynolds (fluido incomprimibile)

$$\bar{\vec{G}} + \int_A \bar{p} \cdot \bar{\vec{n}} \cdot dA - \mu \cdot \int_A \frac{\partial \bar{\vec{v}}}{\partial n} \cdot dA + \rho \cdot \int_A \bar{\vec{v}} \cdot \vec{v}_n \cdot dA - \rho \int_W \frac{\partial \bar{\vec{v}}}{\partial t} \cdot dW = 0$$



$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \quad \downarrow$$



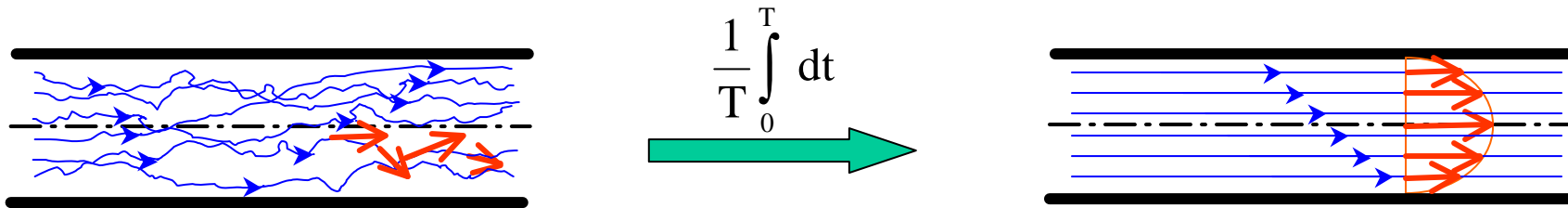
$$\bar{\vec{G}} + \int_A \bar{p}_m \cdot \bar{\vec{n}} \cdot dA - \mu \cdot \int_A \frac{\partial \bar{\vec{v}}_m}{\partial n} \cdot dA + \rho \int_A \bar{\vec{v}}_m \cdot \vec{v}_{n,m} \cdot dA + \rho \int_A \left(\overline{\vec{v}' \cdot \vec{v}'_n} \right)_m \cdot dA - \rho \int_W \frac{\partial \bar{\vec{v}}_m}{\partial t} \cdot dW = 0$$

$$\vec{\bar{G}} + \vec{\bar{\Pi}}_p + \vec{\bar{\Pi}}_\mu + \vec{\bar{M}} + \vec{\bar{I}} = 0$$

$$\downarrow \frac{1}{T} \int_0^T dt$$

$$\vec{\bar{G}}_m + \vec{\bar{\Pi}}_{m,p} + \vec{\bar{\Pi}}_{m,\mu} + \vec{\bar{M}}_m + \vec{\bar{M}}'_m + \vec{\bar{I}}_m = 0$$

$$\vec{\bar{M}}'_m = \rho \cdot \int_A \left(\overline{\vec{v}' \cdot \vec{v}'_n} \right)_m \cdot dA$$



\underline{v} istantanee: 3D, non stazionarie, irregolari

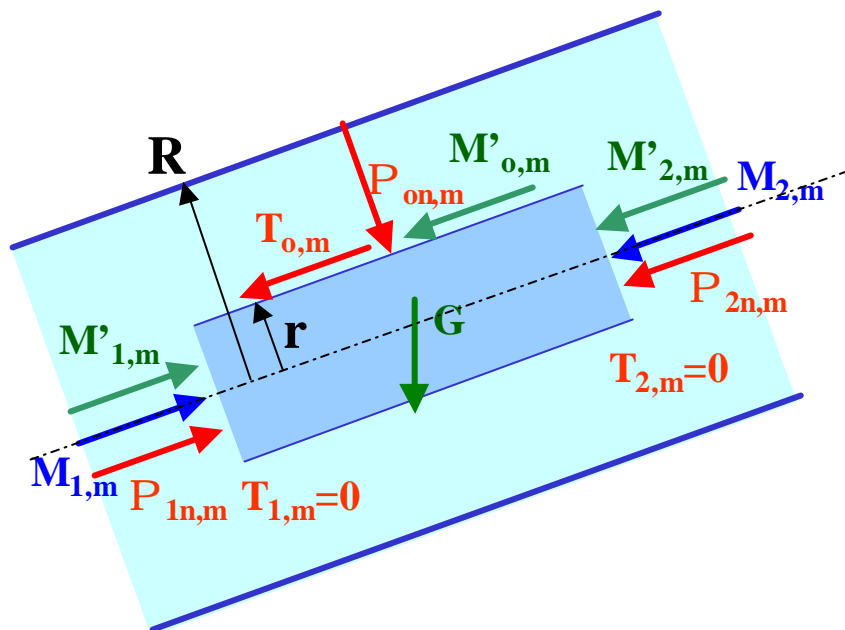
media di Reynolds \Rightarrow regolarizzazione della soluzione

\underline{v} medie: 1D, stazionarie, regolari

sul campo mediato è possibile ripetere l'approccio utilizzato per il caso laminare

equilibrio in direzione del moto:

$$P_{n1,m} + \cancel{M_{1,m}} + \cancel{M'_{1,m}} = P_{n2,m} + \cancel{M_{2,m}} + \cancel{M'_{2,m}} + T_{o,m} + M'_{o,m} + G \sin \alpha = 0$$



$$\Pi_{n1,m} = \Pi_{p1,m} + \Pi_{\mu1,m} \quad \Pi_{n2,m} = \dots$$

$$\left. \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial n} \right|_{A1} = \left. \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial s} \right|_{A1} = 0 \Rightarrow \bar{\Pi}_{\mu1,m} = \int_{A1} \mu \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial n} dA = 0$$

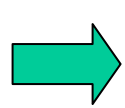
$$\bar{P} \quad A p_{1,m} = A p_{2,m} + T_{o,m} + M'_{o,m} + G \sin \alpha$$

$$p_{1,m}/\gamma = p_{2,m}/\gamma + J_m L + (z_2 - z_1)$$

$$G = \gamma A L$$

$$z_2 - z_1 = L \sin \alpha$$





$$\mathbf{T}_{o,m} + \mathbf{M}'_{o,m} = g \mathbf{W} \mathbf{J}_m$$

$$\vec{M}'_{o,m} = \rho \cdot \int_{A_o} (\overline{v'} \cdot v'_n)_m \cdot dA$$

direzione \equiv asse corrente
verso opposto al moto medio

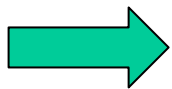
si indichi: u_m, u' = componente assiale della velocità

$v' = v'_n$ componente radiale della velocità (valore medio = 0)

$$M'_o = \rho \cdot \int_{A_o} (u' \cdot v')_m \cdot dA = \rho A_o (u' \cdot v')_m$$

costante sulla superficie laterale
(uniformità del moto + simmetria)

$$T_{o,m} = - \int_{A_o} \mu \frac{\partial u_m}{\partial r} dA = -\mu \frac{du_m}{dr} A_o$$



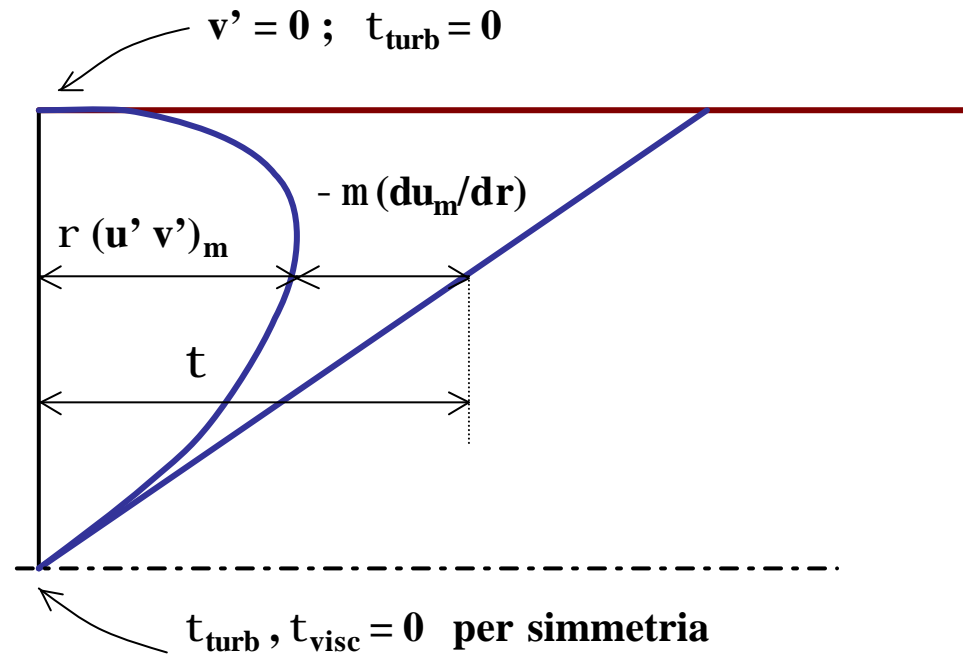
$$-\mu \frac{du_m}{dr} + \rho (u' \cdot v')_m = \frac{\gamma R}{2} J_m$$

la cadente J è legata agli sforzi viscosi + termine turbolento

è come se sulla superficie laterale agisse lo sforzo tangenziale: $\tau = -\mu \cdot \frac{du_m}{dr} + \rho (u' \cdot v')_m$

gli scambi turbolenti di quantità di moto generano un effetto equivalente a quello di uno sforzo tangenziale (sforzi di Reynolds)

$$\tau = \underbrace{-\mu \cdot \frac{du_m}{dr}}_{\text{sforzo viscoso}} + \underbrace{\rho(u' \cdot v')_m}_{\text{sforzo di Reynolds}}$$



aderente alla parete c'è : SUBSTRATO LIMITE VISCOSO

integro l'equazione del moto

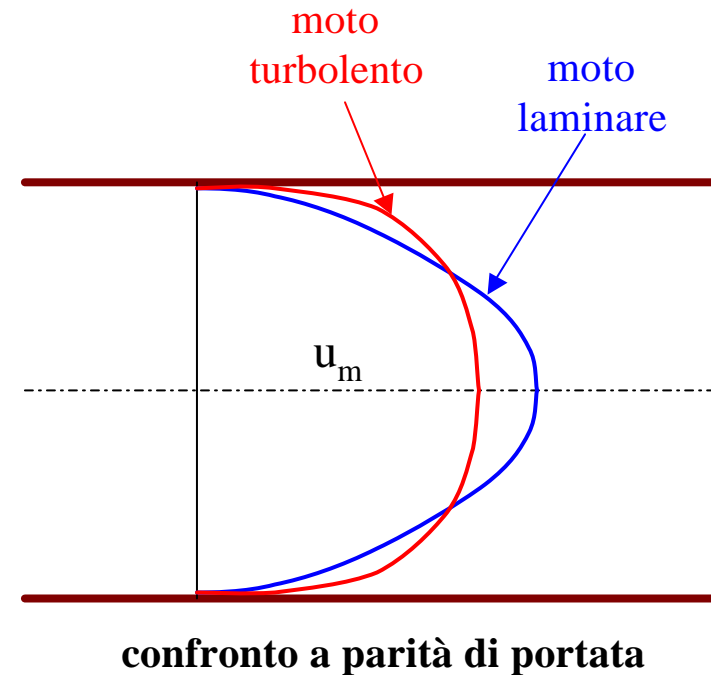
$$u_m(r) = -\frac{\gamma J}{4\mu} (R^2 - r^2) - \frac{\rho}{\mu} \int_r^R (u'v')_m \cdot dr$$

come per moto
laminare

= 0 per $r = R$
per $r \rightarrow 0$, cresce



1. J maggiori che per il caso laminare a parità di velocità medie (e quindi di portata)
2. profilo di velocità (media) appiattito (maggiori sforzi tangenziali)
3. la soluzione del campo di moto medio *non è definita*: la distribuzione radiale del termine $(u'v')_m$ è incognita



J = ???