Dr. Monica Riva - Prof. Alberto Guadagnini

Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento (DIIAR)

Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci, 32, 20133 Milano- Italy

MOTO VARIO

Note del Corso di *Meccanica dei Fluidi*

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica - Facoltà di Milano Bovisa

Sezioni A & B

A.A. 2000 / 2001

Generalità

Moto vario: variazione da istante a istante e da sezione a sezione degli elementi che caratterizzano la corrente:

$$p(t)\,,\quad v(t)\,,\quad Q(t)$$

Esempio: Organo di regolazione $\rightarrow \Delta Q$

- Le correnti vengono considerate nel loro complesso - Caratteristiche globali (Q, A, V= Q/A)
- Correnti lineari

$\forall\, t$, $\forall$ sez. è possibile associare il valore del carico totale *H*

$$H = z + \frac{p}{g} + a\,\frac{V^2}{2g}$$

Per ogni istante *t* $\exists$ una linea dei carichi totali ed una piezometrica

Generalità

Moto stazionario: trasformazione dell'energia meccanica in termica per effetto delle resistenze (Conservazione dell'energia per le singole particelle di fluido).

Moto vario: scambio di energia meccanica tra le diverse parti del fluido in moto. Il carico totale (H) a valle può essere maggiore di quello a monte.

La **conservazione** dell'energia è soddisfatta:

- Globalmente a tutta la massa fluida
- Trasformazioni di energia da meccanica in elastica del liquido e dell'involucro

Si possono verificare elevate concentrazioni di energia in ristrette zone della corrente. (Esempio: Δp, ΔQ)

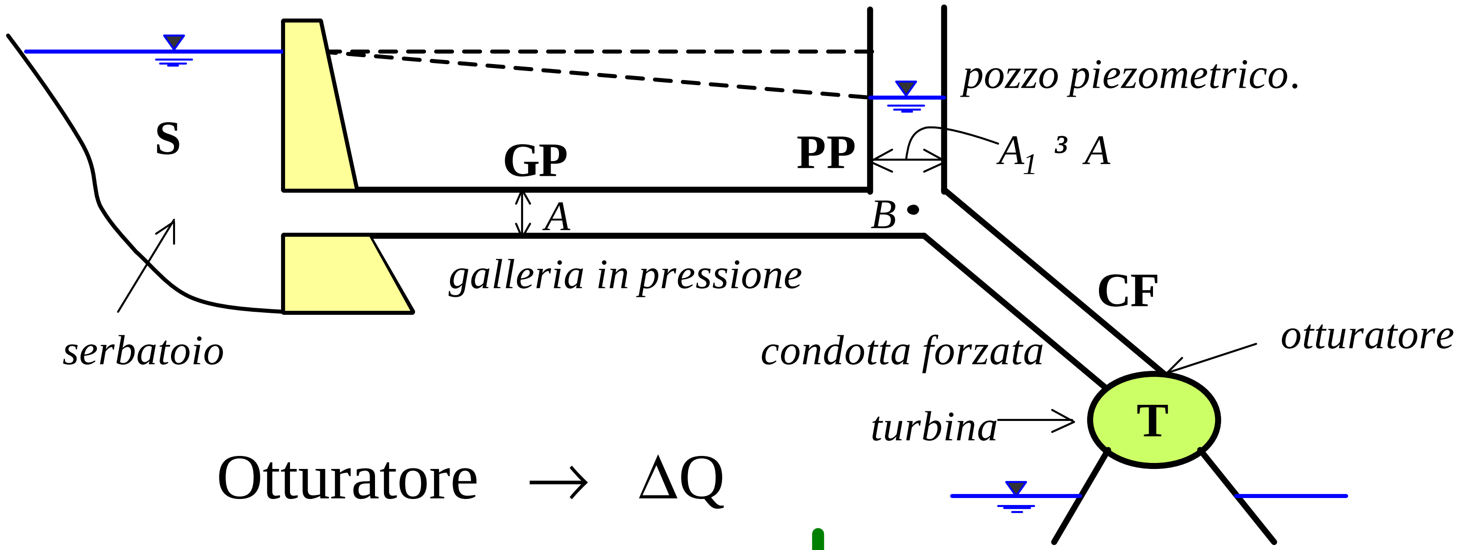
Generalità

Variazione di portata ΔQ

Si generano brusche variazioni degli elementi caratteristici della corrente (Es. Δp). Tali perturbazioni si muovono lungo la corrente (come un'onda) con una velocità denominata ***celerità***.

La *celerità* delle perturbazioni è funzione: delle caratteristiche **elastiche** del fluido e della condotta.

Esempio: impianto idroelettrico



Otturatore $\rightarrow$ ΔQ

Condotta Forzata: COLPO D'ARIETE

Elevata celerità: veloce smorzamento dovuto alle dissipazioni che accompagnano le trasformazioni di energia

L $\cong$ 100 m resistenze idrauliche **trascurabili**

L $\cong$ 1000 m resistenze idrauliche **non trascurabili** (es. oleodotti)

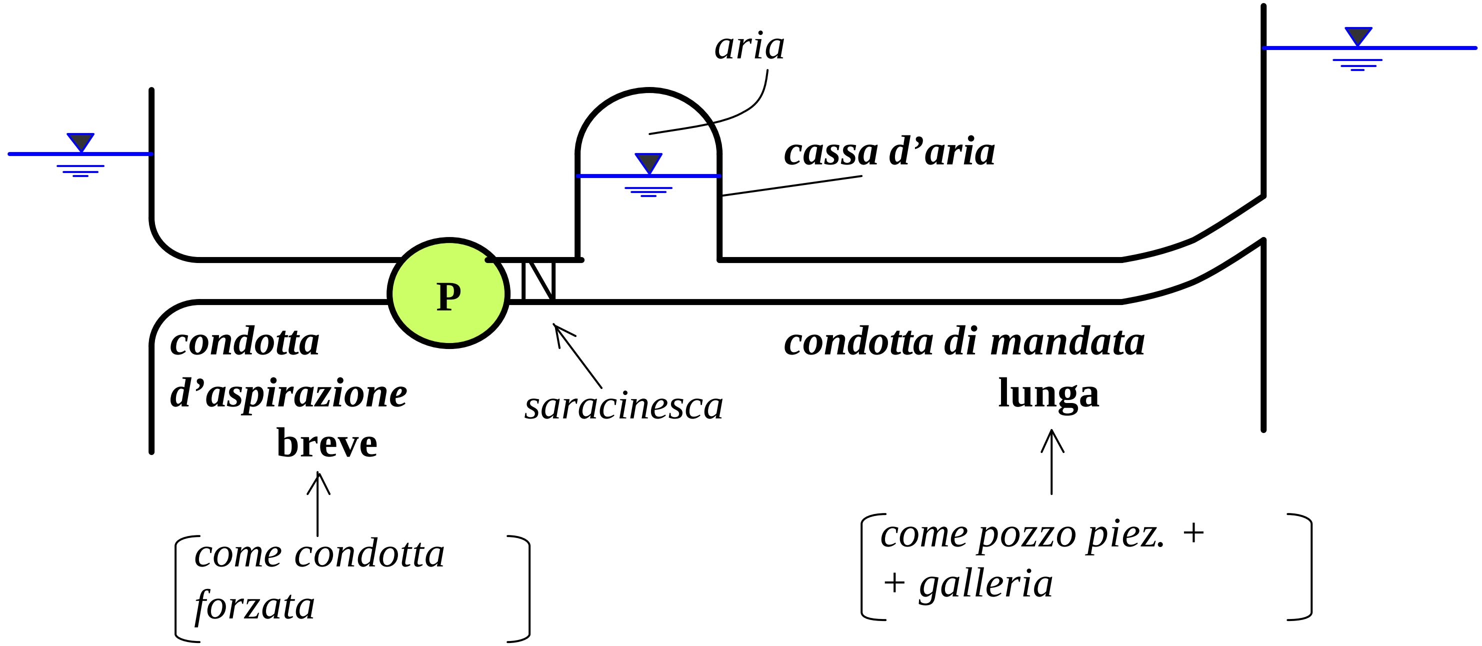
Galleria: OSCILLAZIONI DI MASSA

$\Delta Q \rightarrow \Delta p$ in CF $\rightarrow$ in B squilibrio di Q

$Q_{GP} = Q_{iniz}$ $\qquad Q_{CF} = Q_{iniz} - \Delta Q$

variazioni di livello in PP lente (trasporto di massa) $\rightarrow$ resistenze al moto in galleria e nel pozzo piezometrico **non trascurabili**

Esempio: impianto di sollevamento



Due processi di moto vario:

Colpo d'Ariete: proprietà elastiche del fluido (fluido comprimibile)
proprietà elastiche della condotta (condotta deformabile)
resistenze idrauliche trascurabili

Oscillazioni di Massa: condotta indeformabile
fluido incomprimibile
resistenze idrauliche non trascurabili

COLPO D'ARIETE – Equazioni differenziali del moto

Hp. Perdite di carico distribuite e localizzate nulle

$$\rho\left(\overline{F}-\overline{A}\right)= grad\ (p)$$

Equazione di Eulero

Proietto lungo la traiettoria e divido per γ

$$\left(-\frac{\partial z}{\partial s}-\frac{1}{g}\frac{dV}{dt}\right)=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}$$

Hp. Correnti lineari

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+V\cdot\frac{\partial V}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}+\frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{1}{g}\left(V\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{\partial V}{\partial t}\right)=0$$

COLPO D'ARIETE – Equazioni differenziali del moto

Dall'equazione di continuità per le correnti $$\frac{\partial(\rho\, Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho\, A)}{\partial t} = 0$$

Ricordando che $Q = V\,A$; $\rho = \rho\,\{\,p\,(\,s,\,t\,)\,\}$; $A = A\,\{\,p\,(\,s,\,t\,)\,\}$

$$\frac{\partial A}{\partial s} = \frac{dA}{dp}\frac{\partial p}{\partial s} \qquad \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{dp}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial s} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(\rho V A)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = V\,\frac{\partial(\rho A)}{\partial s} + \rho A\,\frac{\partial V}{\partial s} + \rho\,\frac{\partial A}{\partial t} + A\,\frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$= V\,\frac{\partial(\rho A)}{\partial s} + \rho A\,\frac{\partial V}{\partial s} + \left(\rho\,\frac{dA}{dp} + A\,\frac{d\rho}{dp}\right)\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

COLPO D'ARIETE – Equazioni differenziali del moto

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial z}{\partial s} + \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial p}{\partial s} + \dfrac{1}{g}\left(V\dfrac{\partial V}{\partial s} + \dfrac{\partial V}{\partial t}\right) = 0 \\[2ex]
V\dfrac{\partial(\rho A)}{\partial s} + \rho A\dfrac{\partial V}{\partial s} + \left(\rho\dfrac{dA}{dp} + A\dfrac{d\rho}{dp}\right)\dfrac{\partial p}{\partial t} = 0 \\[2ex]
\rho = \rho\,(\,p\,(s,\,t)\,) \\
A = A\,(p\,(s,\,t)\,) \\
\text{Condizioni al contorno} \\
\text{Condizioni iniziali}
\end{cases}
$$

Problema definito

4 equazioni in 4 incognite: V, p, ρ, A

Integrazioni numeriche alle differenze finite

COLPO D'ARIETE – Equazioni differenziali del moto

$$\text{Hp:} \begin{cases} \left| V \dfrac{\partial F}{\partial s} \right| << \left| \dfrac{\partial F}{\partial t} \right| \Rightarrow |V| << |c| \qquad c = -\dfrac{\partial F}{\partial t} \Big/ \dfrac{\partial F}{\partial s} \\ \dfrac{p}{\varepsilon} << 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{g}\left(\cancel{V \frac{\partial V}{\partial s}} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) = 0$$

Equazione del moto

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\gamma}\right) = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{p}{\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial s}$$

$$\frac{p}{\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial s} = g\,\frac{p}{\gamma^2}\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial s} = g\,\frac{p}{\gamma^2}\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{p}{\varepsilon}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\gamma}\right) = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{p}{\varepsilon}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}\left(1 - \cancel{\frac{p}{\varepsilon}}\right) = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\gamma}\right) + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

Hp: Condotta cilindrica $\dfrac{\partial A}{\partial s} = 0$ **Equazione di continuità**

$$V\frac{\partial(\rho A)}{\partial s} + \rho A\frac{\partial V}{\partial s} + \left(\rho\frac{dA}{dp} + A\frac{d\rho}{dp}\right)\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$\dfrac{\partial A}{\partial s} = 0$

$$VA\frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho A\frac{\partial V}{\partial s} + \left(\rho\frac{dA}{dp} + A\frac{d\rho}{dp}\right)\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Divido per (ρA)

$$\frac{V}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial s} + \left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dp} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}\right)\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\frac{V}{\rho}\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial s} + \left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dp} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}\right)\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dp}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \cancel{V\frac{\partial p}{\partial s}}\right) = 0$$

$\dfrac{d\rho}{dp} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$

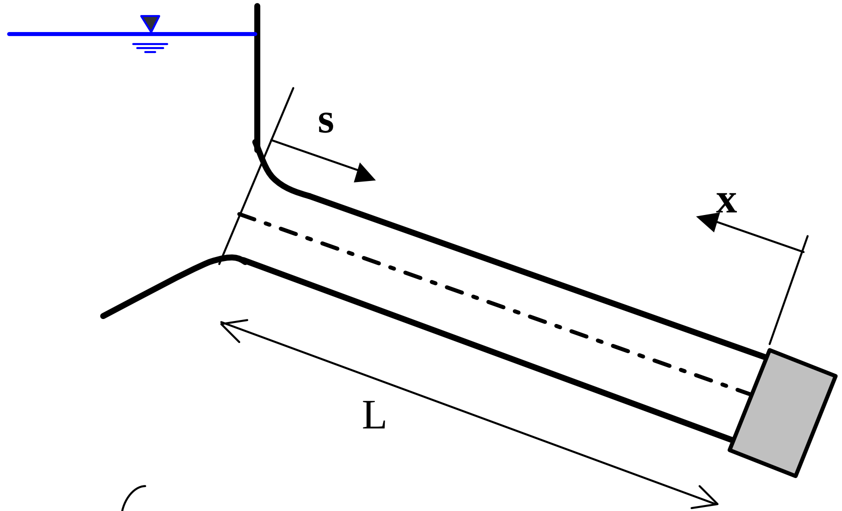
$$\frac{\partial V}{\partial s} + \left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dp} + \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

COLPO D'ARIETE – Equazioni differenziali del moto

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{p}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p}{\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{1}{\gamma}\left[1 - \frac{p}{\gamma}\frac{d\gamma}{dp}\right]\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\gamma}\left[1 - \cancel{\frac{p}{\varepsilon}}\right]\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \gamma\left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dp} + \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

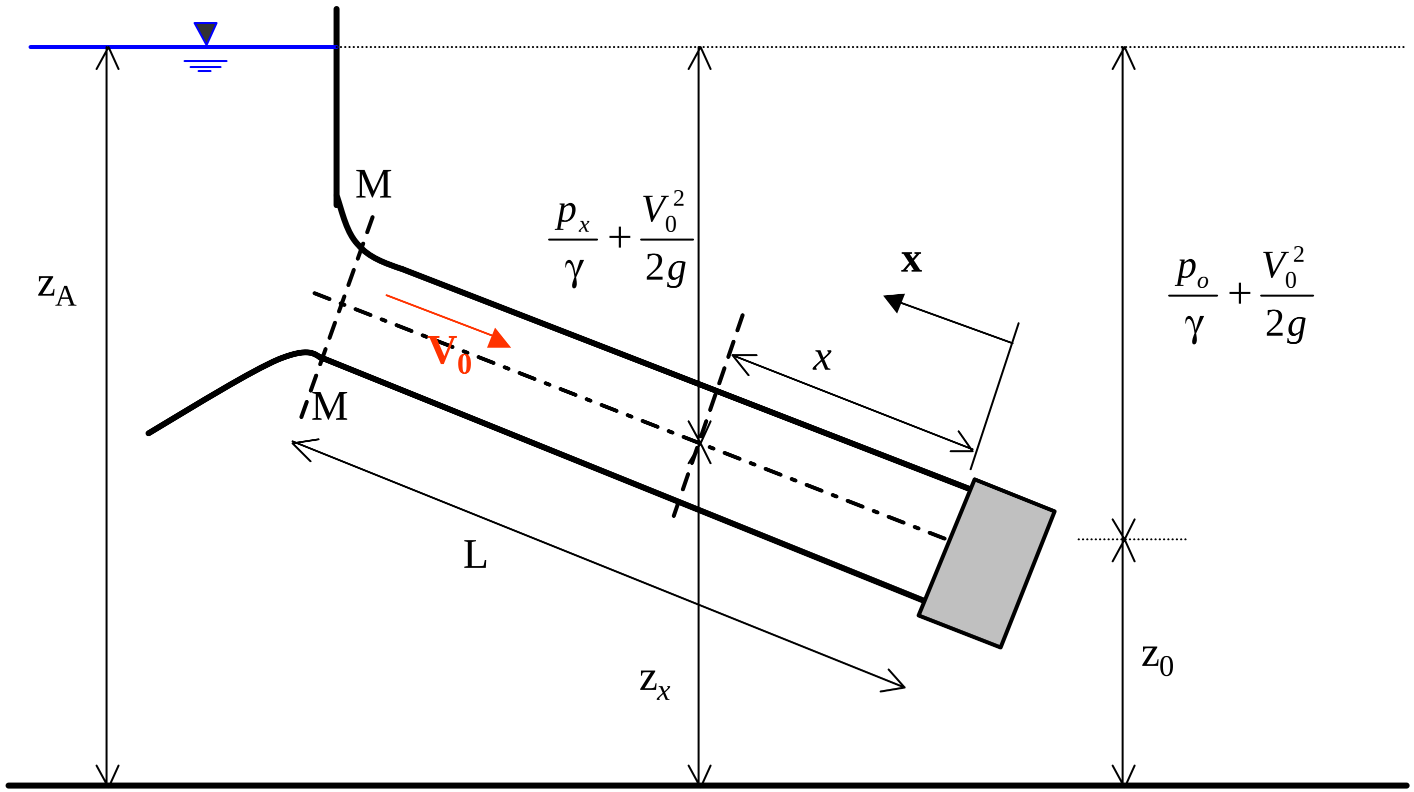
$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial s} + \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial s} + \gamma\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{dA}{dp} + \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\dfrac{\partial h}{\partial t} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial V}{\partial t} \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} = \gamma\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{dA}{dp} + \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\dfrac{\partial h}{\partial t} \\ A = A(p) \\ \text{Condizioni al contorno} \\ \text{Condizioni iniziali} \end{cases}$$

Hp: $\begin{cases} \text{Condotta cilindrica} \\ \text{Perdite di carico nulle} \\ \text{Correnti lineari} \\ |V| << |c| \qquad \dfrac{p}{\varepsilon} << 1 \end{cases}$

COLPO D'ARIETE – Manovre istantanee

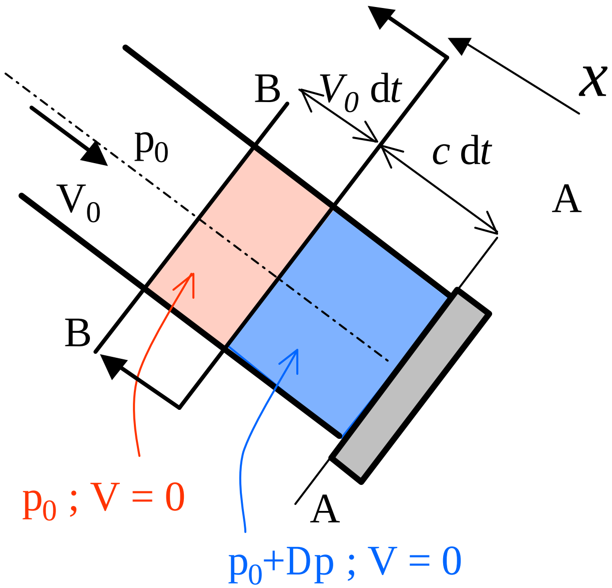


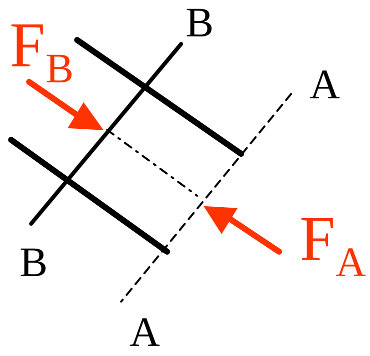
$\mathbf{Z_A}$ = cost

A = cost

(condotta cilindrica indeformabile)

COLPO D'ARIETE – Manovre istantanee





$$\vec{F}\,dt = d\left(m\vec{V}\right)$$

Teorema degli impulsi

$$\left(p_A A_A - p_B A_B\right) dt = 0 - \rho\ A\left(V_0 + c\right) dt\left(-V_0\right)$$

$$\Downarrow$$

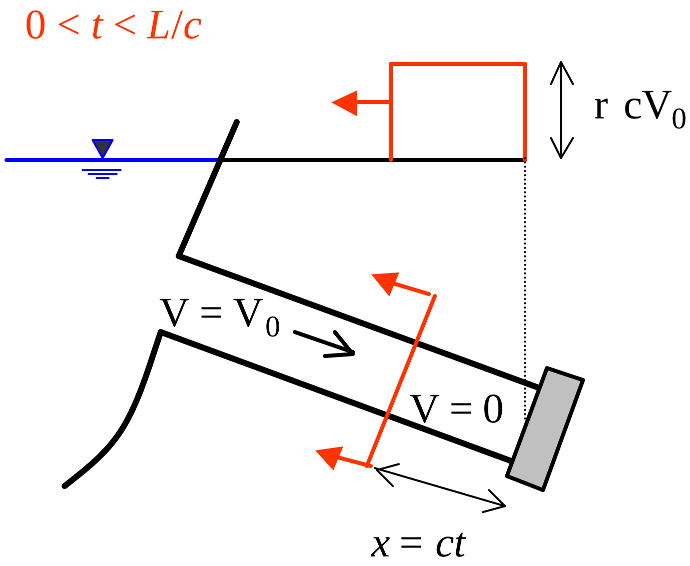
- Condotta indeformabile $A_A = A_B = A$
- $V_0 << c$

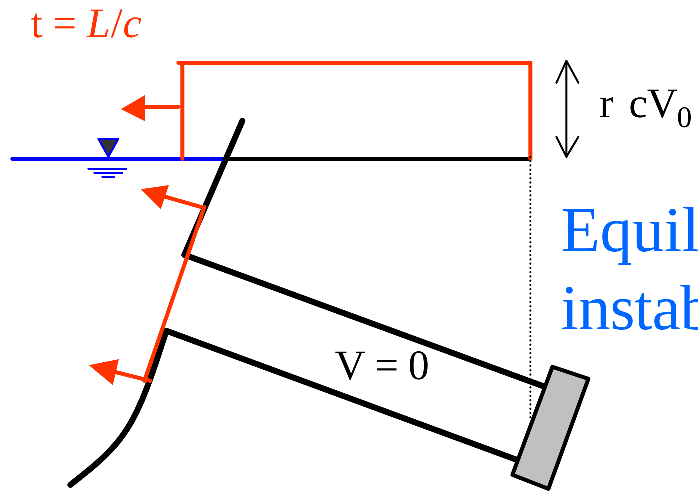
$$\left(p_A - p_B\right) A\,dt = \rho\ A\,c\,dt\,V_0$$

$$\Delta p = \left(p_A - p_B\right) = \rho\ \ c\ \ V_0$$

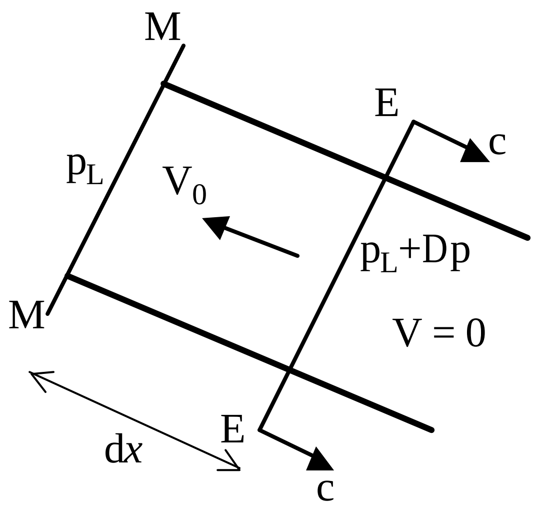
A meno di infinitesimi di ordine superiore valida anche per condotte deformabili

COLPO D'ARIETE – Manovre istantanee





Equilibrio instabile



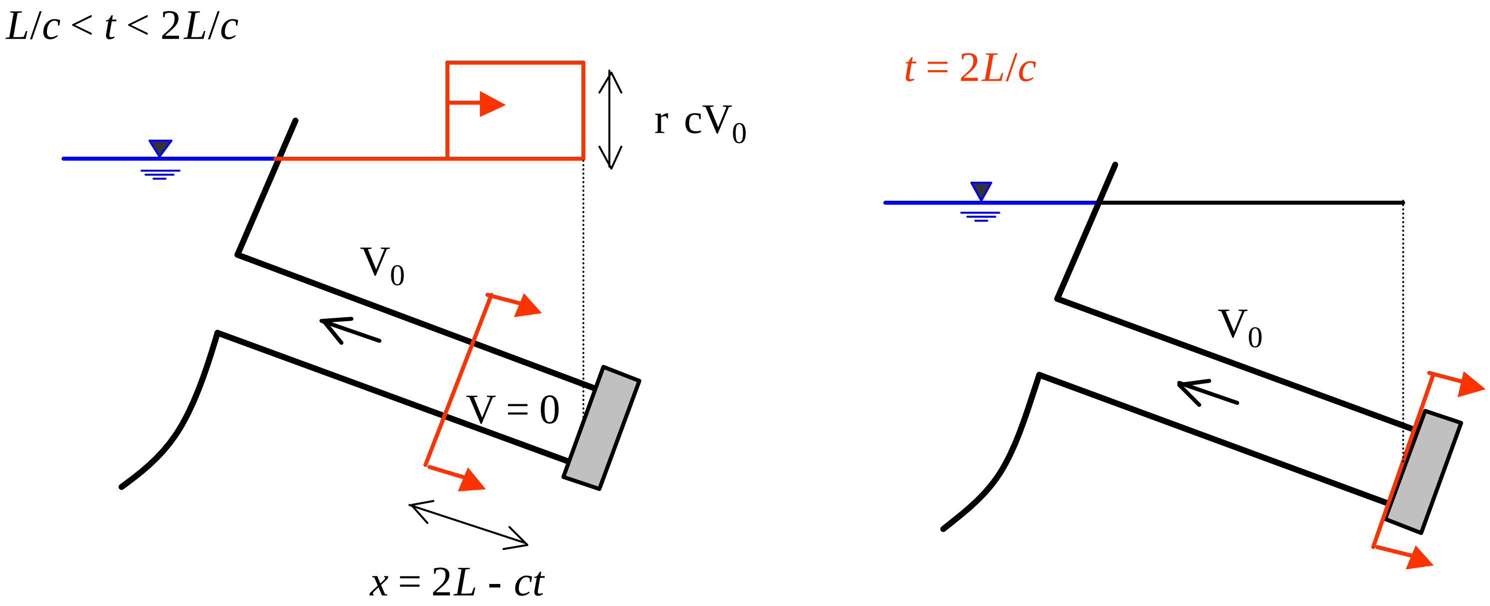
$$\mathrm{d}\left(m\,\vec{\mathrm{V}}\right) = \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

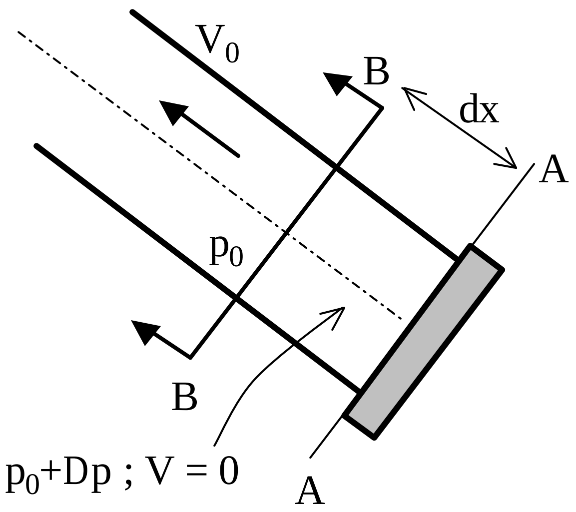
$$\Delta p = -\,\rho\,c\,V_0$$

$$\mathrm{V}_x\,\rho\,\mathrm{A}\,\mathrm{d}x = \Delta \mathrm{p}\,\mathrm{A}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{V}_x = -\,\mathrm{V}_0$$

COLPO D'ARIETE – Manovre istantanee





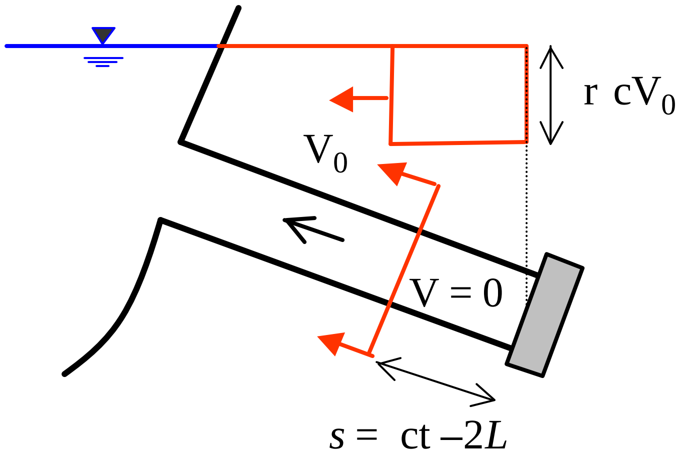
$$d\left(m\,\vec{V}\right)=\vec{F}\,dt$$

$$0-\rho\,A\,dx\,V_0=A\left(p_A-p_B\right)dt$$

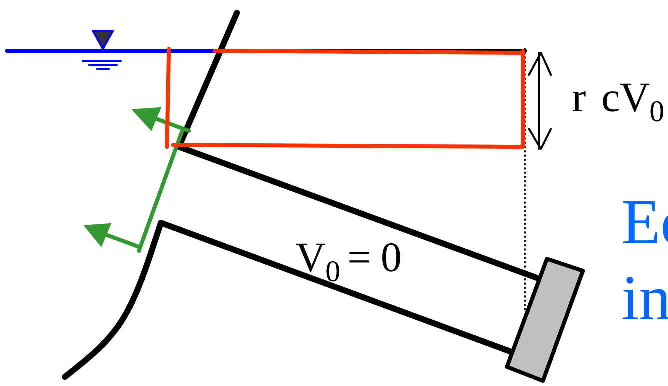
$$\Delta p=\left(p_A-p_B\right)=-\rho\,c\,\,V_0$$

COLPO D’ARIETE – Manovre istantanee

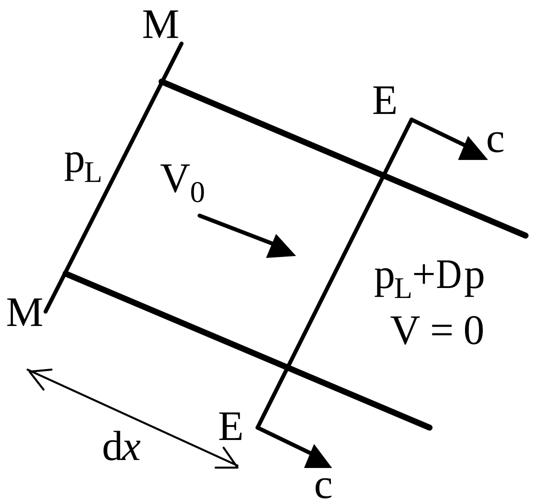
$2L/c < t < 3L/c$



t = 3L/c



Equilibrio instabile



$$d\left(m\,\vec{V}\right) = \vec{F}\ dt$$

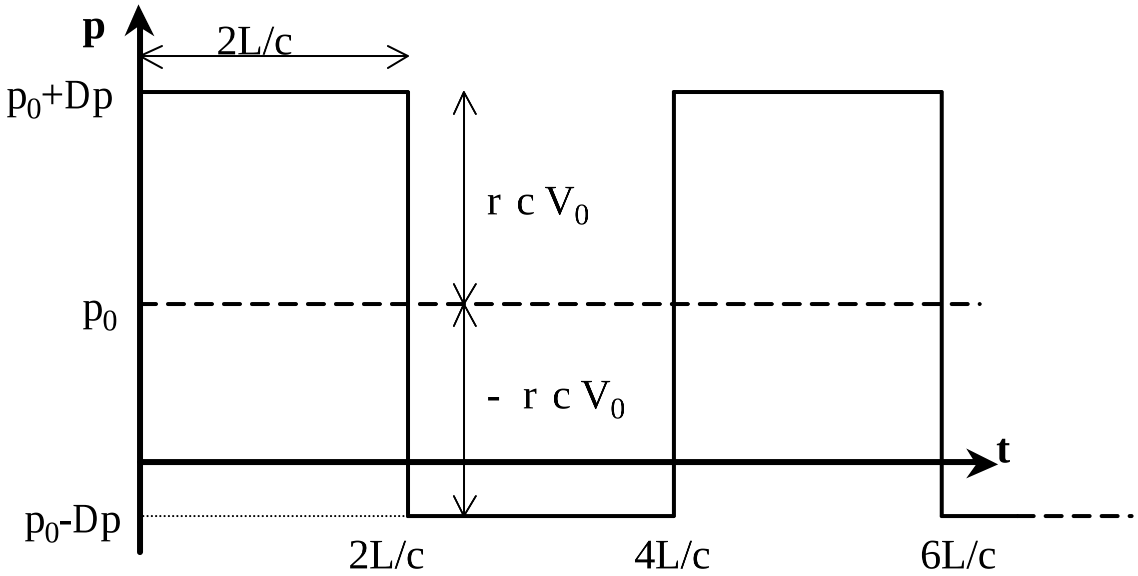
$$\Delta p = \rho c V_0$$

$$\rho\ A\ c\ dt\ V_x = \Delta p\ A\ dt$$

$$V_x = V_0$$

Fenomeno periodico di periodo $T = 4L/c$

COLPO D'ARIETE – Manovre istantanee



$x = 0$

Otturatore

$t = 0$ Partenza dall'otturatore dell'onda positiva di pressione ascendente

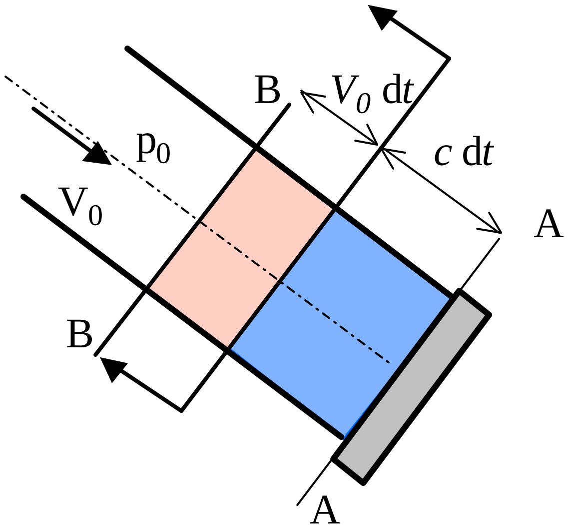
$t = 2L/c$ Arrivo all'otturatore dell'onda discendente negativa e partenza dell'onda ascendente negativa

$t = 4L/c$ Arrivo all'otturatore dell'onda discendente positiva e partenza dell'onda ascendente positiva

CHIUSURA PARZIALE ISTANTANEA:

$Q_0 \rightarrow Q_f$ $V_0 \rightarrow V_f$ $\Delta p = \rho\ c\ (V_0 - V_f) = \rho\ c\ \Delta V$

COLPO D'ARIETE – Celerità della perturbazione



Per acqua a 8° C

c = 1425 m/s

Continuità:

$$\left(V_0 + c\right)\rho A dt = c dt\left(A + \Delta A\right)\left(\rho + \Delta\rho\right)$$

1) Condotta **indeformabile** (ΔA=0)

$$V_0 \rho A dt + c\rho A dt = cA\rho dt + cA\Delta\rho dt$$

$$V_0 \rho = c\Delta\rho$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{\varepsilon}$$

$$V_0 = c\frac{\Delta p}{\varepsilon}$$

$$\Delta p = \rho \; c \; V_0$$

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = c*$$

CELERITA' DELLA PERTURBAZIONE

Continuità: $$\left(V_0 + c\right)\rho A dt = c dt\left(A + \Delta A\right)\left(\rho + \Delta\rho\right)$$

2) Condotta **deformabile** ($\Delta A \neq 0$)

$$V_0 \rho A dt + c\rho A dt = cA\rho dt + cA\Delta\rho dt + c\Delta A\rho dt + c\Delta A\Delta\rho dt$$

$$V_0 = c\frac{\Delta\rho}{\rho} + c\frac{\Delta A}{A} + c\frac{\Delta A\Delta\rho}{\rho A}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta A}{\Delta p}\frac{\Delta p}{A} \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{\varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$V_0 = c\frac{\Delta p}{\varepsilon} + c\frac{\Delta A}{\Delta p}\frac{\Delta p}{A} + c\frac{\Delta p}{\varepsilon}\frac{\Delta A}{\Delta p}\frac{\Delta p}{A}$$

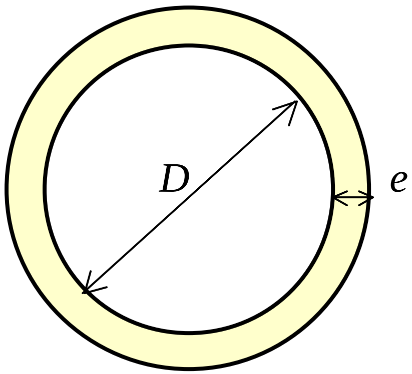
$$\Downarrow \qquad \Delta p = \rho\, c\, V_0$$

$$1 = c^2\frac{\rho}{\varepsilon} + c^2\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\Delta A}{\Delta p}\frac{\varepsilon}{A} + c^2\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\Delta p}{A}\frac{\Delta A}{\Delta p} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{\varepsilon/\rho}{1 + \frac{\Delta A}{\Delta p}\left(\frac{\varepsilon}{A} + \cancel{\frac{\Delta p}{A}}\right)}} < c^*$$

CELERITA' DELLA PERTURBAZIONE

La celerità diminuisce se la condotta è deformabile: la dilatazione della tubazione ha gli stessi effetti di un aumento della comprimibilità del liquido.

Esempio: condotta circolare



Hp: $e << D$ $\Rightarrow$ $\sigma = \frac{p \ D}{2 \ e}$

Formula di Mariotte

Allungamento unitario (Legge di Hooke):

$$d\delta = \frac{d\sigma}{E}$$

$$\Downarrow$$

$$d\delta = \frac{D}{2 \cdot e \cdot E} \cdot dp$$

E = modulo di elasticità lineare della condotta

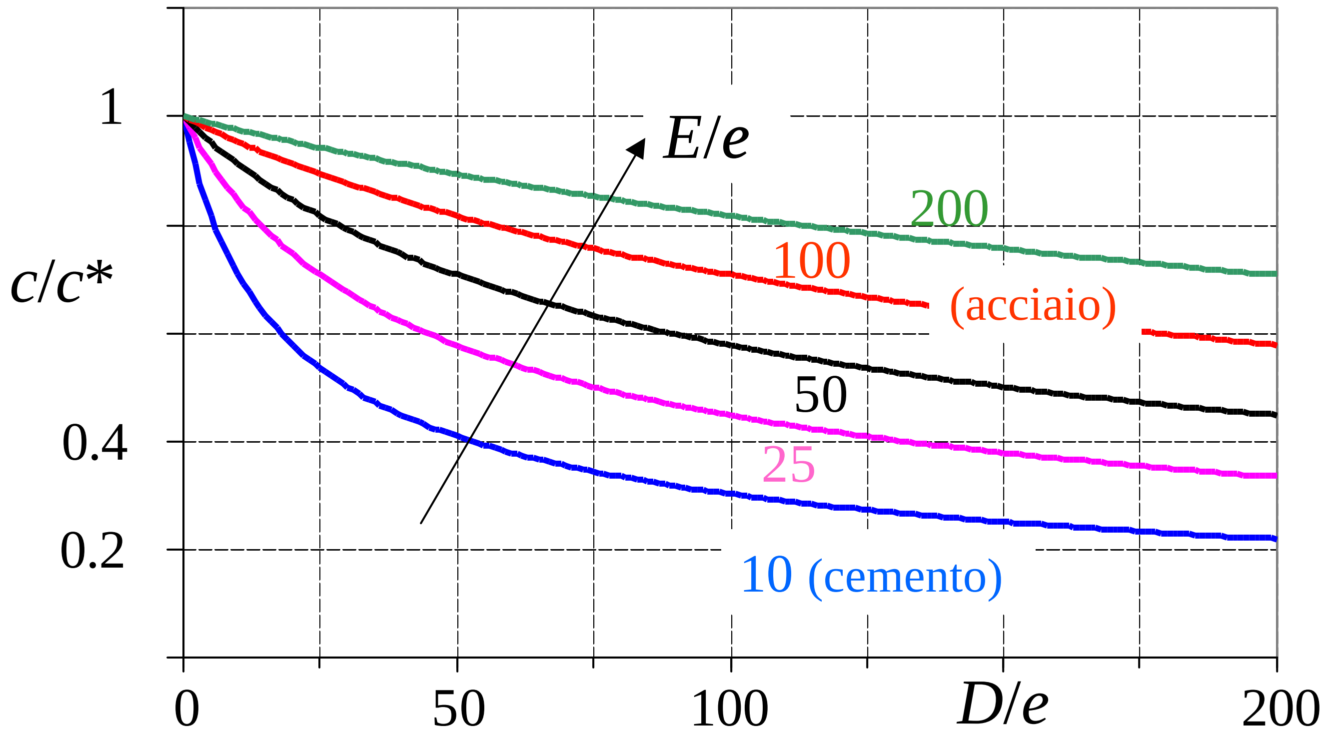
CELERITA' DELLA PERTURBAZIONE

Allungamento del diametro D: $$dD = D\, d\delta = \frac{D^2}{2\, e\, E}\, dp$$

$$A = \frac{\pi\, D^2}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{dA}{dp} = \frac{dA}{dD}\,\frac{dD}{dp} = \frac{\pi}{4}\, 2\, D\, \frac{D^2}{2\, e\, E} = A\, \frac{D}{e\, E}$$

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon / \rho}{1 + \frac{D}{e}\,\frac{\varepsilon}{E}}} = \frac{c^*}{\sqrt{1 + \frac{D}{e}\,\frac{\varepsilon}{E}}}$$

c^{-} Se: $D/e \uparrow$; $\varepsilon/E \uparrow$ ⇨ **Tubo deformabile**



Se fluido acqua e la condotta è in acciaio

$E/e = 100$; $D/e = 100$

⇩

$c/c^* \approx 0.7$

$c \approx 900\text{-}\ 1000$ m/s

Colpo d'Ariete - Caso Generale

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon/\rho}{1+\frac{dA}{dp}\frac{\varepsilon}{A}}} \quad \Rightarrow \quad c^2 = \frac{\varepsilon}{\rho}\frac{1}{1+\frac{dA}{dp}\frac{\varepsilon}{A}} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{dA}{dp}\frac{\varepsilon}{A} = \frac{\varepsilon}{\rho}\frac{1}{c^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{A}\frac{dA}{dp} = \frac{1}{\rho c^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial V}{\partial t} \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} = \gamma\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{dA}{dp}+\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\dfrac{\partial h}{\partial t} \end{cases}$$

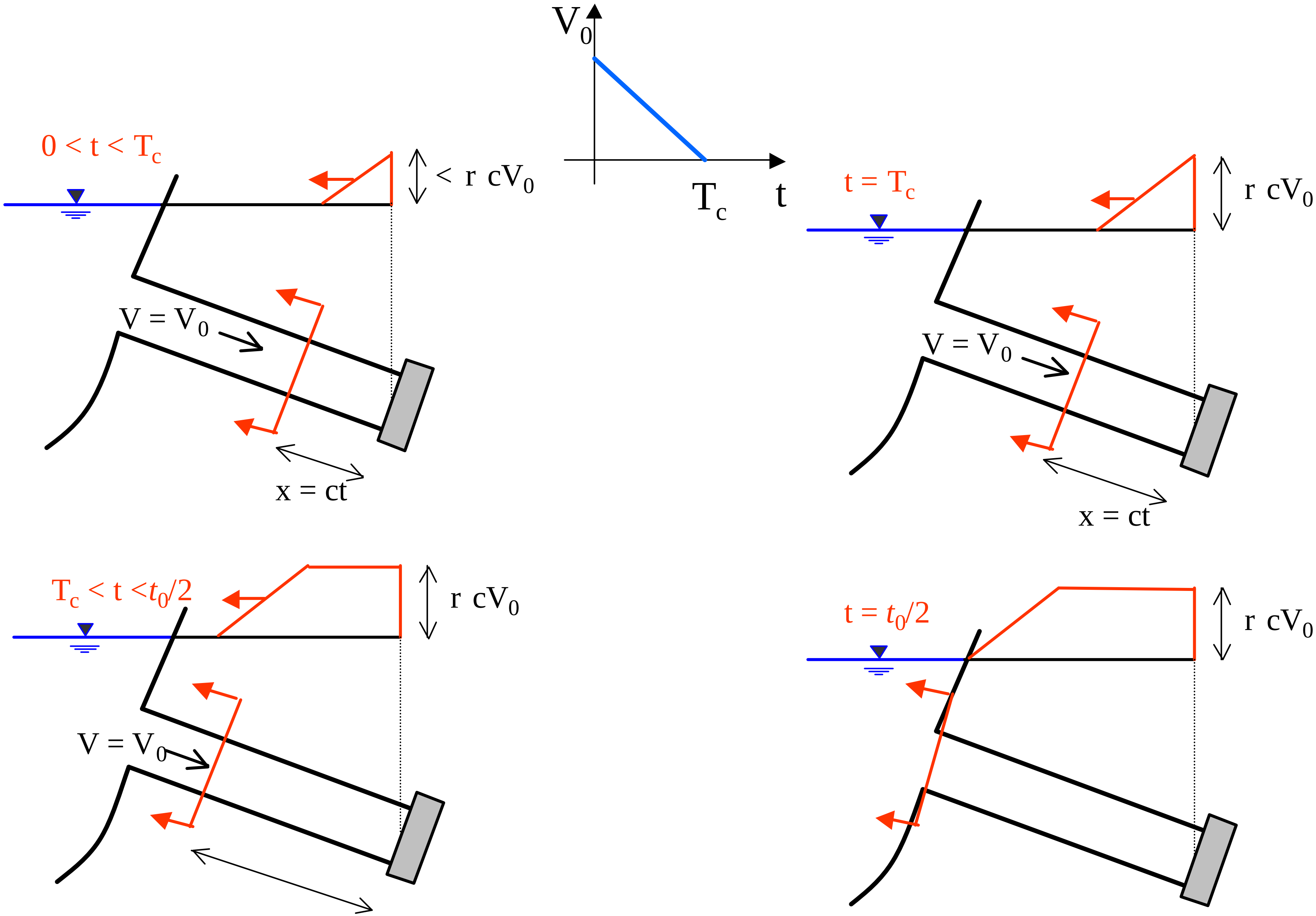
$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial V}{\partial t} \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{g}{c^2}\dfrac{\partial h}{\partial t} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \Delta h = h(x) - h_0(x) = F(x-ct) + f(x+ct) \\ \Delta V = V_0(x) - V(x) = \dfrac{g}{c}\Delta h \end{array}$$

Dove:

F*, *f sono due funzioni definite sulla base delle **condizioni al contorno**

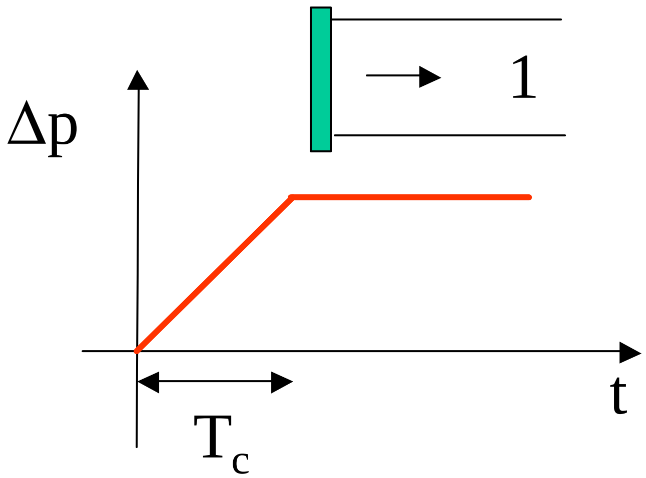
h_0, V_0 sono due funzioni definite sulla base delle **condizioni iniziali**

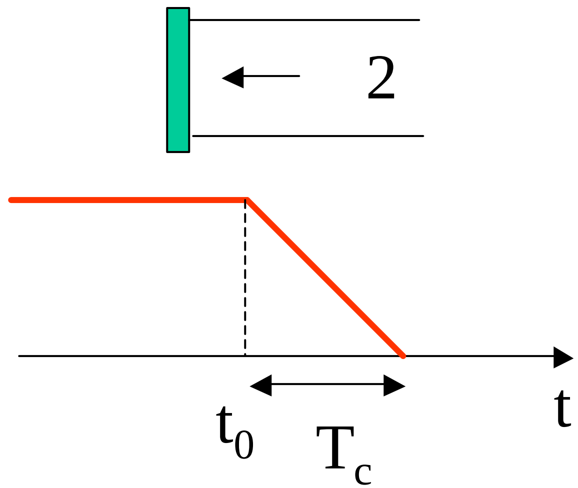
Colpo d'Ariete – Es. Manovre Lineari

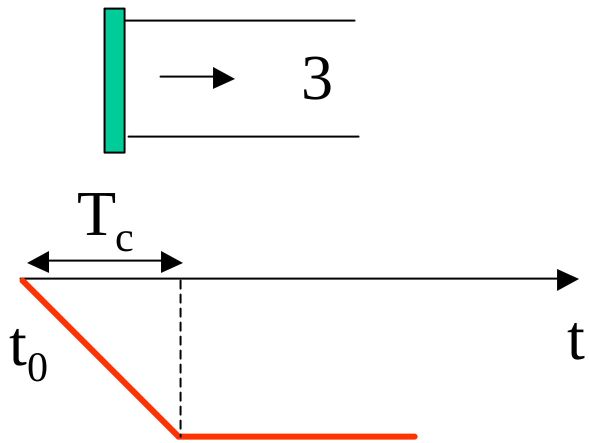


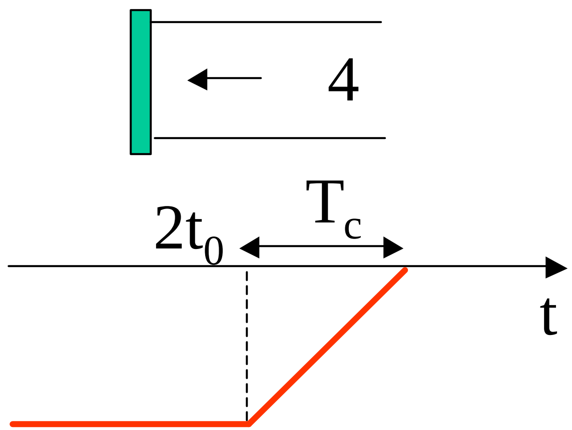
Colpo d'Ariete - Es. Manovre Lineari

Otturatore



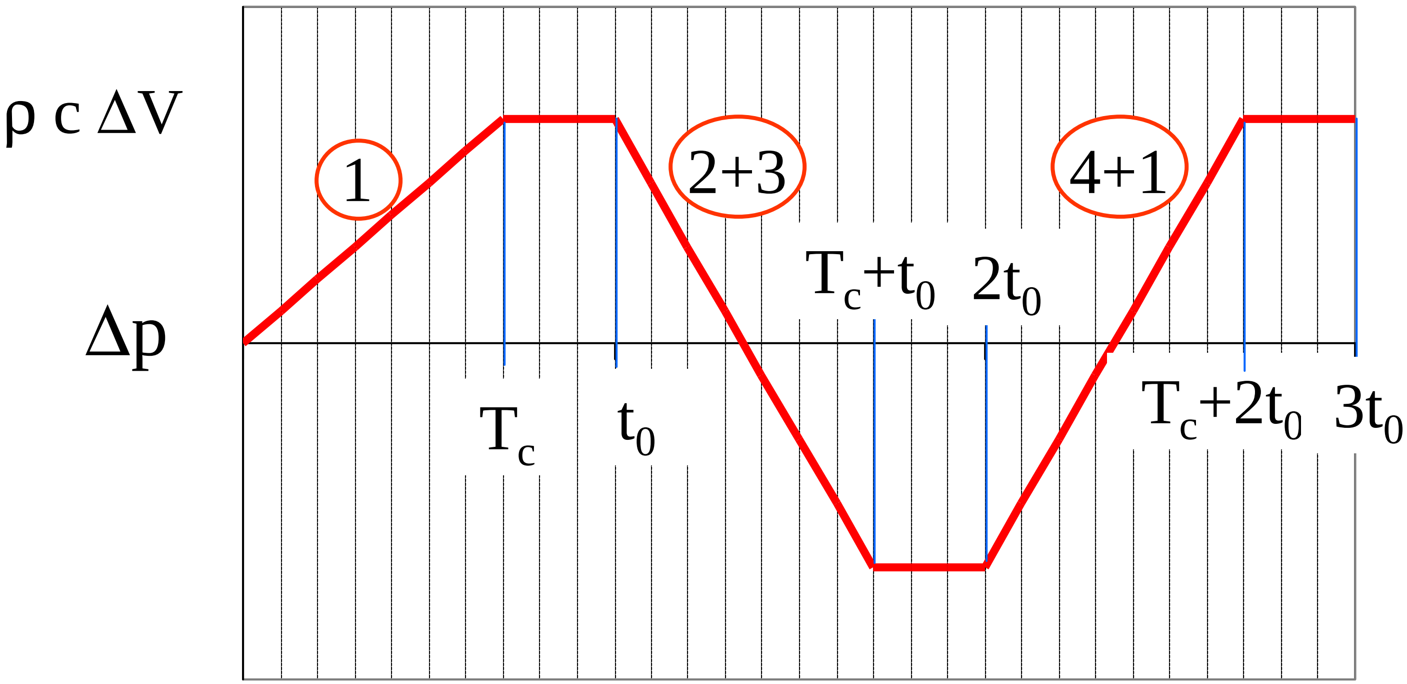






Colpo d'Ariete - Es. Manovre Lineari

$t_0 > T_c$ (manovre brusche)



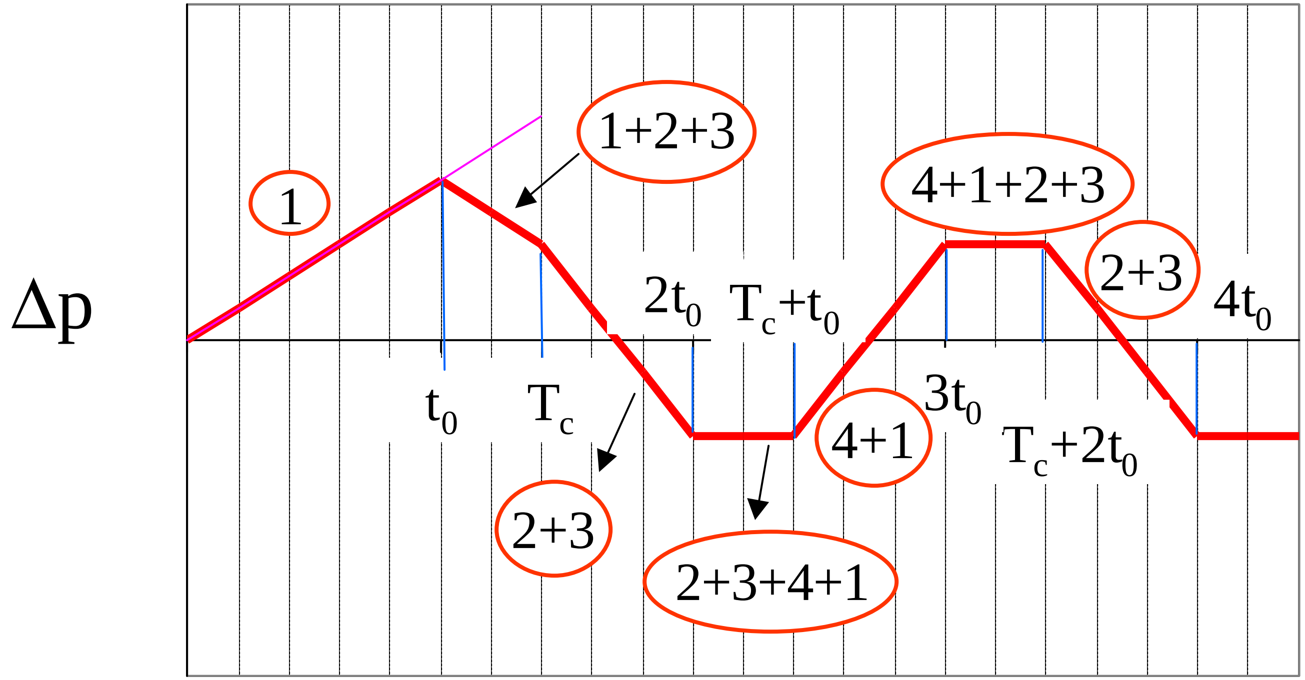
$T_c = 7$ s

$t_0 = 10$ s

$$\Delta p_{max} = \rho\ c\ \Delta V$$

Colpo d'Ariete - Es. Manovre Lineari

$t_0 < T_c$ (manovre lente)



$T_c = 7$ s

$t_0 = 5$ s

$$\frac{\Delta p_{max}}{t_0} = \frac{\rho c \Delta V}{T_c}$$

$$\boxed{\Delta p_{max} = \frac{t_0}{T_c}\rho c \Delta V = \frac{2L}{T_c}\rho \Delta V}$$

Formula di Michaud

Colpo d'Ariete - Caso Generale

- Δp è indipendente dalla pressione esistente prima della perturbazione

- $t_0 < T_c$ Δp_{max} coincide con la soluzione impulsiva (indipendente da T_c e da L)

- $t_0 > T_c$ $\Delta p_{max} \uparrow$ se $T_c \downarrow$ e L $\uparrow$