



Prof. Alberto Guadagnini - Prof. Monica Riva

Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento (DIAR)

Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci, 32, 20133 Milano- Italy

Analisi dimensionale e teorema II

Note del Corso di *Meccanica dei Fluidi*

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica - Facoltà di Milano Bovisa

Sezioni A & B

A.A. 2001 / 2002

Estratto della dispensa "**Similitudine e Modelli**" del corso di Idraulica II,
a cura di S. Franzetti, F. Ballio, A. Guadagnini.

La versione integrale della dispensa può essere reperita sul sito web del
corso di Idraulica II: <http://www.diar.polimi.it/franz/idr2-lecco/index.htm>

1. INTRODUZIONE

Si consideri il moto permanente di un fluido all'interno di un tubo circolare, liscio e di lunghezza indefinita. Si vuole determinare sperimentalmente la legge che regola la caduta di pressione per unità di lunghezza dovuta agli sforzi tangenziali (problema attualmente non risolvibile rigorosamente per via analitica e/o numerica).

Il primo passo di ogni sperimentazione consiste nel definire i parametri che hanno effetto sulla caduta di pressione per unità di lunghezza, $\Delta p/L$. Ragionevolmente si può ritenere che sia:

$$\Delta p/L = f(D, V, \rho, \mu) \quad (1.1)$$

dove D è il diametro del tubo, V la velocità media, ρ e μ rispettivamente la densità e la viscosità del fluido. La forma della funzione $f()$ è l'incognita del problema.

Per ottenere un risultato di validità generale è necessario effettuare serie di prove sperimentali in cui si mantengano fissi i valori di tutti i parametri tranne uno, che viene fatto variare nell'intervallo di interesse, mentre contemporaneamente si misura Δp . Tali prove producono risultati simili a quelli mostrati in figura 1.1, in cui viene evidenziata la dipendenza di Δp in funzione di ogni singola variabile per 10 punti all'interno dell'intervallo di interesse. Per definire quantitativamente la relazione funzionale (1.1) con tale passo di discretizzazione è ovviamente necessario ripetere le prove per ogni combinazione dei parametri; nel caso in esame sono pertanto necessarie 10^4 prove sperimentali, risultanti in un considerevole numero di grafici, o, in alternativa, in una complessa tabella a quattro entrate, e lunghe procedure di interpolazione grafica o numerica quando si voglia valutare la (1.1) per valori generici di (D, V, ρ, μ) ; difficilmente sarà possibile trovare un'approssimante analitica che si adatti all'insieme dei valori trovati. Si deve inoltre considerare che, se è piuttosto semplice variare la velocità V nel corso delle prove, più onerosa risulta la sperimentazione al variare del diametro D , mentre è estremamente arduo variare la densità del fluido a pari viscosità e viceversa.

Nel seguito si mostra come lo studio del problema ora posto può essere condotto in modo molto più semplice e razionale, riducendo significativamente il numero di esperimenti necessari alla definizione della relazione funzionale (1.1), mediante il teorema II.

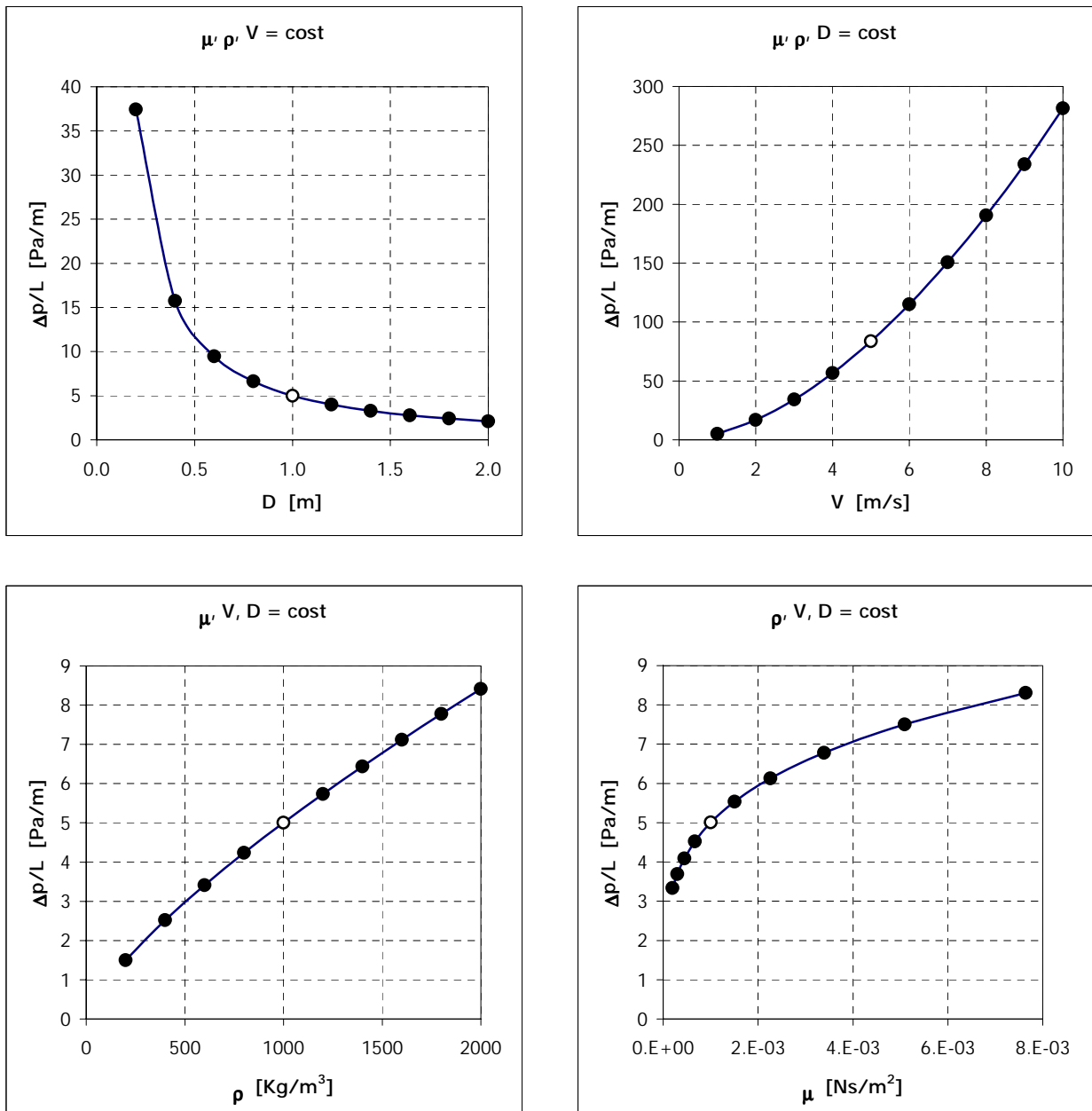


Figura 1.1 – Andamento della caduta specifica di pressione in funzione delle diverse variabili dimensionali.

Punto a simbolo vuoto: $D = 1 \text{ m}$, $V = 1 \text{ m/s}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$.

2. TEOREMA II

2.1 ENUNCIATO E DIMOSTRAZIONE

Si consideri la relazione:

$$g_0 = f(g_1, g_2, g_3, \dots, g_n) \quad (2.1)$$

fra le grandezze (g_1, \dots, g_n) che caratterizzano un dato fenomeno (variabili indipendenti, o *variabili di controllo*) e una grandezza di interesse g_0 relativa al fenomeno medesimo (variabile dipendente, o *variabile di stato*). La relazione fisica tra le grandezze considerate non dipende evidentemente dai riferimenti o dai sistemi di misura adottati, anche se la forma specifica della (2.1) può in generale variare in relazione ad essi.

Tra le (g_1, \dots, g_n) si scelgano tre¹ grandezze *fra loro dimensionalmente indipendenti*, ovvero sia atte a rappresentare una terna di grandezze base per un sistema di unità di misura. Posto che tali grandezze siano (g_1, g_2, g_3) si può sempre scrivere:

$$[g_i] = [g_1]^{\alpha_i} [g_2]^{\beta_i} [g_3]^{\gamma_i} \quad i = 0, \dots, n \quad (2.2)$$

ovverosia esprimere le dimensioni di ogni grandezza come prodotto di potenze delle tre grandezze base del sistema di unità scelto. Si definiscono poi le grandezze:

$$\Pi_i = \frac{g_i}{g_1^{\alpha_i} g_2^{\beta_i} g_3^{\gamma_i}} \quad (2.3)$$

Per loro stessa definizione, le Π_i sono grandezze *adimensionali* (ovverosia a dimensione nulla), e rappresentano la *misura* delle g_i rispetto alla terna di riferimento (g_1, g_2, g_3) . Poiché, come già osservato, la dipendenza fra le grandezze considerate non dipende dal sistema di misura, se non per la *forma* della relazione funzionale che le lega, la (2.1) può essere scritta in funzione delle grandezze Π risultando:

$$\Pi_0 = f_I(1, 1, 1, \Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_n) \quad (2.1')$$

essendo pari all'unità la misura delle (g_1, g_2, g_3) rispetto a se stesse. Risulta, in definitiva:

$$\Pi_0 = f_{II}(\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_n) \quad (2.1'')$$

La (2.1'') mostra che, *con una scelta opportuna del sistema di misura*, è possibile ridurre il numero delle variabili indipendenti di 3 unità. Questo risultato è noto sotto il nome di *Teorema II*, ovvero Teorema di Riabucinski-Buckingham. La (2.1'') può essere espressa in termini della variabile dimensionale g_0 :

$$g_0 = g_1^{\alpha_0} g_2^{\beta_0} g_3^{\gamma_0} f_{II}(\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_n) \quad (2.1''')$$

¹ Tre grandezze sono sufficienti per un sistema definito da sole grandezze meccaniche. Per una generalizzazione a sistemi più complessi si veda più avanti.

2.2 APPLICAZIONE

Si riconsideri il problema presentato nel paragrafo 1 alla luce del Teorema II. Quale terna base di grandezze si può scegliere (D, V, ρ); tali grandezze sono fra loro indipendenti: è immediato verificare che le loro dimensioni, valutate rispetto alla usuale terna meccanica (L, M, T = unità di lunghezza, massa, tempo):

$$[D] = L \qquad [V] = L T^{-1} \qquad [\rho] = M L^{-3}$$

sono fra loro indipendenti, e quindi (D, V, ρ) possono essere utilizzate per esprimere qualsiasi grandezza meccanica in alternativa a (L, M, T). Date le dimensioni di μ e di Δp/L rispetto a (L, M, T) si determinano immediatamente le loro dimensioni rispetto a (D, V, ρ):

$$[\mu] = M L^{-1} T^{-1} = D V \rho \qquad [\Delta p/L] = M L^{-2} T^{-2} = D^{-1} V^2 \rho$$

e quindi i gruppi adimensionali:

$$\Pi_{\mu} = \frac{\mu}{\rho V D} \qquad \Pi_{\Delta p/L} = \frac{\Delta p/L}{\rho V^2 / D}$$

La (1.1) può in definitiva essere riscritta come:

$$\Pi_{\Delta p/L} = \frac{\Delta p/L}{\rho V^2 / D} = f_1 \left(Re = \frac{\rho V D}{\mu} \right) \qquad (1.1')$$

in cui si è evidenziata la grandezza adimensionale $Re = 1/\Pi_{\mu}$ (numero di Reynolds). Essendosi ridotto il numero di variabili indipendente ad una soltanto, la soluzione del problema posto è definita da una singola curva "universale", derivante da un'unica serie di esperienze in cui la caduta di pressione nel tubo viene misurata al variare del numero di Reynolds (figura 2.1).

Ovviamente, qualora non risultasse sperimentalmente vera la (1.1') si dovrebbe dedurre essere non vera la (1.1).

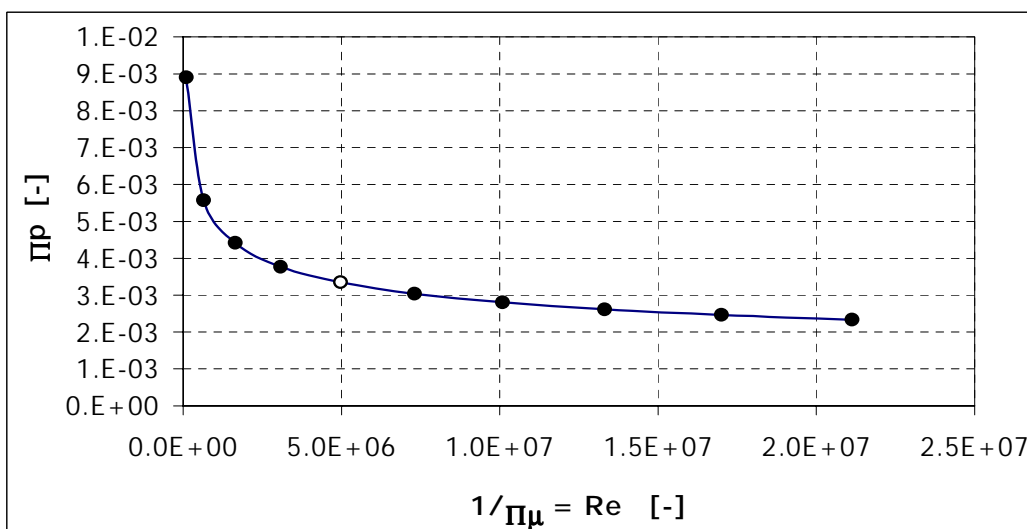


Figura 2.1 – Andamento della caduta specifica di pressione adimensionale in funzione del numero di Reynolds. Base di adimensionalizzazione: (ρ, V, D).

ρ = cost; μ = cost; D = 0.10÷2.1 m; V = 1÷10 m/s.

2.3 OSSERVAZIONI E COMMENTI

Vantaggi delle formulazioni adimensionali

La formulazione di un problema in forma adimensionale richiede di abbandonare le usuali grandezze base scelte come unità di misura, per passare ad un sistema di riferimento *intrinseco* al problema medesimo. La complicazione formale è ampiamente giustificata da alcuni fondamentali vantaggi.

- a) Si riduce il numero di variabili indipendenti che definiscono il sistema, e quindi la quantità di dati sperimentali necessari, e di conseguenza si semplifica la ricerca di formule analitiche interpolari.
- b) Entrambe la (1.1) e la (1.1') definiscono correttamente la relazione fra le perdite in un tubo e i parametri di controllo del sistema. I valori delle variabili (dimensionali) che compaiono nella funzione $f()$ della (1.1) dipendono dal sistema di unità di misura utilizzato, cosicché anche i valori della $f()$ variano con il sistema di misura; viceversa, nella $f_1()$ della (1.1') compaiono solo variabili adimensionali, i cui valori sono indipendenti dal sistema di misura: la relazione (1.1') risulta pertanto *invariante al sistema di misura* medesimo. L'adimensionalità delle variabili è *condizione necessaria* affinché una relazione abbia carattere "universale" (evidentemente non è condizione sufficiente: una formula sbagliata rimane tale anche se in forma adimensionale).
- c) I gruppi Π possono essere variati tramite ognuna delle variabili che lo compongono. Ad esempio, nella (1.1'), il numero di Reynolds (che rappresenta gli effetti della viscosità sulle perdite) può essere variato tenendo μ costante e modificando la velocità, oppure il diametro; si risolve così uno dei problemi segnalati nel paragrafo 1.1. In altre parole, risulta sperimentalmente più semplice variare le singole grandezze adimensionali rispetto a quelle dimensionali (nell'esempio di figura 2.1 il numero di Reynolds è stato variato tramite V e D , mentre ρ e μ sono stati mantenuti costanti).
- d) La formulazione adimensionale permette facilmente di confrontare sistemi "simili" ma di dimensione diversa. Tale affermazione sarà ampiamente discussa nei paragrafi 3+5.

Scelta delle variabili

- a) Per un efficace uso del teorema Π *non* è necessario conoscere la struttura del legame funzionale $f()$ fra la variabile dipendente di interesse e le variabili indipendenti che la definiscono. E' invece essenziale determinare *a priori* il numero e la natura delle variabili indipendenti, sulla base dell'intuito, delle conoscenze di base sul fenomeno in esame e delle equazioni generali che lo governano. L'omissione di una variabile nel legame funzionale conduce ad una legge scorretta, o perlomeno di carattere non generale. E' piuttosto preferibile inserire variabili che presumibilmente non influiscono sulla variabile dipendente, salvo eliminarle in un secondo tempo una volta riconosciuta sperimentalmente la loro estraneità al fenomeno.
- b) Le variabili indipendenti (variabili di controllo) tipicamente includono tutte le caratteristiche *geometriche* del sistema, comprese le dimensioni del dominio (condizioni

al contorno) e le scabrezze superficiali, le caratteristiche *fisiche* dei materiali (solidi e fluidi), le condizioni *cinematiche* imposte ai contorni (le condizioni cinematiche interne sono invece variabili dipendenti del problema), le *forze esterne* di volume e di superficie.

- c) Nel caso interessino i valori distribuiti nello spazio e nel tempo della variabile dipendente (si cerchi cioè una funzione spazio-temporale anziché un semplice valore puntuale ed istantaneo) tra le variabili di controllo devono essere anche inserite le coordinate spazio-temporali, che entrano nel processo di adimensionalizzazione come una qualsiasi variabile indipendente:

$$g_0 = f(g_1, g_2, g_3, \dots, g_n / x, y, z, t)$$

- d) Le variabili di controllo devono essere fra loro effettivamente indipendenti. Per esempio, se si inserisce il diametro di un tubo circolare fra le variabili, l'area trasversale deve essere omessa, in quanto univocamente definita dal diametro. Similmente, nel gruppo diametro, velocità media e portata, due qualunque delle variabili possono essere scelte come indipendenti, la terza essendo legata alle altre (un grado di libertà è annullato da un'equazione). Più in generale, quando all'interno del fenomeno in esame esista un legame fra alcune delle $(g_1, g_2, g_3, \dots, g_n)$, una delle variabili coinvolte in tale legame deve essere omessa. Se poi esiste un legame del tipo $g_x = \phi(g_i, g_j, g_k)$ e si sa che le variabili (g_i, g_j, g_k) entrano nel problema *solo* tramite la g_x , esse possono venir sostituite da quest'ultima solamente.
- e) Quando anche un parametro sia tenuto costante nella sperimentazione (eventualmente con valore uguale a quello assunto nella realtà a cui si fa riferimento), ugualmente tale parametro deve essere inserito nella lista delle variabili di controllo. Non è infatti importante che un parametro dimensionale mantenga valore costante, ma che lo siano tutti i raggruppamenti adimensionali in cui esso compare, e questi dipendono anche da altri parametri. In particolare a priori si devono inserire le proprietà dei fluidi anche se immutate, e l'accelerazione gravitazionale.
- f) Quale grandezza base per il sistema intrinseco di unità di misura può essere scelta una qualsiasi delle variabili di controllo (eventualmente anche una coordinata spaziale e/o il tempo). In questa sede si fa sempre riferimento ad una *terna* di grandezze base, nell'ipotesi implicita che il sistema sia completamente definito da grandezze meccaniche. Sistemi più complessi possono richiedere un numero maggiore di grandezze base (ad esempio dove siano presenti effetti termici deve essere introdotta la temperatura, o una grandezza equivalente), mentre in alcuni casi due grandezze sono sufficienti (ad esempio in problemi statici con carichi permanenti non entra il tempo).²
- g) Nella scelta delle grandezze che formano la terna base, in generale è preferibile scegliere quelle che sicuramente hanno effetto sulla variabile dipendente. Scelte diverse per la terna base portano a diversi gruppi Π , e quindi a diverse strutture del legame funzionale (2.1''); non cambia invece il *numero* delle variabili adimensionali, né la correttezza

² Per approfondimenti sui concetti di dimensione e di grandezze base in un sistema di misura si può fare riferimento al testo di Barenblatt indicato in bibliografia.

dell'approccio. E' inoltre possibile combinare i gruppi adimensionali, pur di non variarne il numero e di mantenerne l'indipendenza. In una formulazione del tipo:

$$\Pi_0 = f_I(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$$

sono corrette le trasformazioni

$$\Pi_0 = f_{II}(1/\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$$

$$\Pi_0 = f_{III}(\Pi_1 \cdot \Pi_2, \Pi_2, \Pi_3)$$

mentre *non* è corretta la

$$\Pi_0 = f_{IV}(\Pi_1 \cdot \Pi_2, \Pi_1, \Pi_2).$$

Come determinare gli esponenti α, β, γ nei gruppi Π

Una volta scelta la terna di grandezze base, gli esponenti α, β, γ nella (2.3) si determinano sostituendo alle (g_1, g_2, g_3) e alla g_i le rispettive dimensioni rispetto all'usuale sistema di misura (M, L, T); poiché la dimensione di un gruppo Π è per definizione nulla, deve essere verificata la:

$$[g_i] = [g_1]^{\alpha_i} [g_2]^{\beta_i} [g_3]^{\gamma_i} \quad (2.4)$$

Nella (2.4) devono essere eguagliati gli esponenti di *ciascuna* delle tre grandezze base (M, L, T), determinando così un sistema di tre equazioni nelle tre incognite $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. Qualora il sistema risulti impossibile, si deve dedurre che le (g_1, g_2, g_3) *non* sono dimensionalmente indipendenti, e quindi si deve scegliere una differente terna.

Si consideri, a titolo di esempio, il caso descritto nel paragrafo 2.2:

$$[D] = L \quad [V] = L T^{-1} \quad [\rho] = M L^{-3} \quad [\mu] = M L^{-1} T^{-1} \quad [\Delta p/L] = M L^{-2} T^{-2}$$

per μ si ha quindi: $M L^{-1} T^{-1} = (L)^{\alpha} (L T^{-1})^{\beta} (M L^{-3})^{\gamma}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha + \beta - 3\gamma = -1 \\ -\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow [\mu] = D V \rho$$

e per $\Delta p/L$: $M L^{-2} T^{-2} = (L)^{\alpha} (L T^{-1})^{\beta} (M L^{-3})^{\gamma}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha + \beta - 3\gamma = -2 \\ -\beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow [\Delta p/L] = D^{-1} V^2 \rho$$

La procedura descritta è piuttosto tediosa. In molti casi, dopo un po' di pratica, si è in grado di individuare i gruppi Π "a occhio", in analogia con casi precedentemente risolti.

Per facilitare la determinazione dei coefficienti (α, β, γ) , si elencano di seguito le più comuni grandezze presenti nei problemi idraulici, e la loro dimensione rispetto alla terna base (M, L, T).

<i>Proprietà dei materiali</i>	densità	$[\rho] = M L^{-3}$
	peso specifico	$[\gamma] = M L^{-2} T^{-2}$
	viscosità	$[\mu] = M L^{-1} T^{-1}$
	comprimibilità (modulo elastico)	$[\epsilon] = M L^{-1} T^{-2}$
	tensione superficiale	$[s] = M T^{-2}$
<i>Grandezze geometriche</i>	lunghezza	$[l] = L$
	area	$[A] = L^2$
	volume	$[W] = L^3$
	scabrezza	$[r] = L$
	angolo	$[\theta] = -$
<i>Grandezze cinematiche</i>	velocità	$[V] = L T^{-1}$
	accelerazione	$[a] = L T^{-2}$
	velocità angolare	$[\omega] = T^{-1}$
<i>Grandezze dinamiche</i>	forza, spinta	$[F] = M L T^{-2}$
	pressione	$[p] = M L^{-1} T^{-2}$
	perdite di carico	$[\Delta h] = L$
	energia, lavoro	$[E] = M L^2 T^{-2}$
	potenza	$[W] = M L^2 T^{-3}$

Autosimilitudine

In alcuni fenomeni può accadere che la dipendenza di una variabile di stato da un parametro di controllo svanisca quando quest'ultimo assume valori "molto grandi" ovvero "molto piccoli"; il concetto di "grande" e "piccolo" deve ovviamente essere visto in senso relativo ai valori delle altre variabili, ovvero sia in termini adimensionali. Passando ad una notazione più precisa, data una relazione fra grandezze adimensionali:

$$\Pi_0 = f(\Pi_1, \dots, \Pi_k, \dots, \Pi_n)$$

se il limite: $\lim_{\Pi_k \rightarrow 0} f(\Pi_1, \dots, \Pi_k, \dots, \Pi_n) = \exists \text{ finito, } \neq 0$ (2.5)

si dice che il fenomeno diviene *autosimile* rispetto a Π_k ; ciò significa che, per valori di Π_k al di sotto (al di sopra) di una certa soglia, il valore della funzione $f()$, e quindi di Π_0 , in pratica non dipende più da Π_k , che quindi può essere eliminato dalle variabili di controllo (limitatamente al campo definito dalla soglia). Poiché le variabili sono tutte adimensionali, il valore numerico della soglia non dipende dal sistema di unità di misura, ma solo dal

fenomeno in esame.

Quale esempio già noto si pensi alla dipendenza delle resistenze nei tubi dal numero di Reynolds (abaco di Moody): per Re sufficientemente elevato (la soglia, in questo caso, risulta funzione della scabrezza relativa) il coefficiente (adimensionale!) di perdita λ non dipende più dal numero di Reynolds.

Se il valore del limite nella (2.5) risulta nullo *non* si può considerare trascurabile la dipendenza di Π_0 da Π_k : le variazioni di Π_0 divengono bensì piccole al diminuire (crescere) di Π_k , ma contemporaneamente diviene piccolo anche Π_0 , così che le variazioni relative non tendono a svanire.

Autosimilitudine incompleta

Nel caso in cui sia:

$$\lim_{\Pi_k \rightarrow 0} f(\Pi_1, \dots, \Pi_k, \dots, \Pi_n) = 0 \quad (2.5')$$

si è osservato non essere corretto concludere che svanisce la dipendenza del fenomeno da Π_k quando quest'ultimo diviene molto piccolo; in molti casi è però possibile determinare un esponente a tale che:

$$\lim_{\Pi_k \rightarrow 0} \frac{f(\Pi_1, \dots, \Pi_k, \dots, \Pi_n)}{(\Pi_k)^a} = \exists \text{ finito, } \neq 0 \quad (2.6)$$

ovverosia $f()$ risulta infinitesimo di ordine a rispetto a Π_k . Per valori sufficientemente piccoli di quest'ultimo si può allora scrivere:

$$\Pi_0 = (\Pi_k)^a f_1(\Pi_1, \dots, \Pi_{k-1}, \Pi_{k+1}, \dots, \Pi_n) \quad (2.7)$$

avendo così esplicitato la dipendenza di Π_0 da Π_k , mentre rimane incognita la dipendenza da tutti i rimanenti parametri. Si parla in questo caso di *autosimilitudine incompleta*: il fenomeno non diviene indipendente da un parametro adimensionale, ma la dipendenza da quest'ultimo può essere esplicitata in forma monomia.

E' semplice estendere i concetti ora esposti per $\Pi_0 \rightarrow \infty$ ovvero per $\Pi_k \rightarrow \infty$.

Per approfondimenti relativi ai concetti di autosimilitudine completa ed incompleta si veda il testo di Barenblatt indicato in bibliografia.

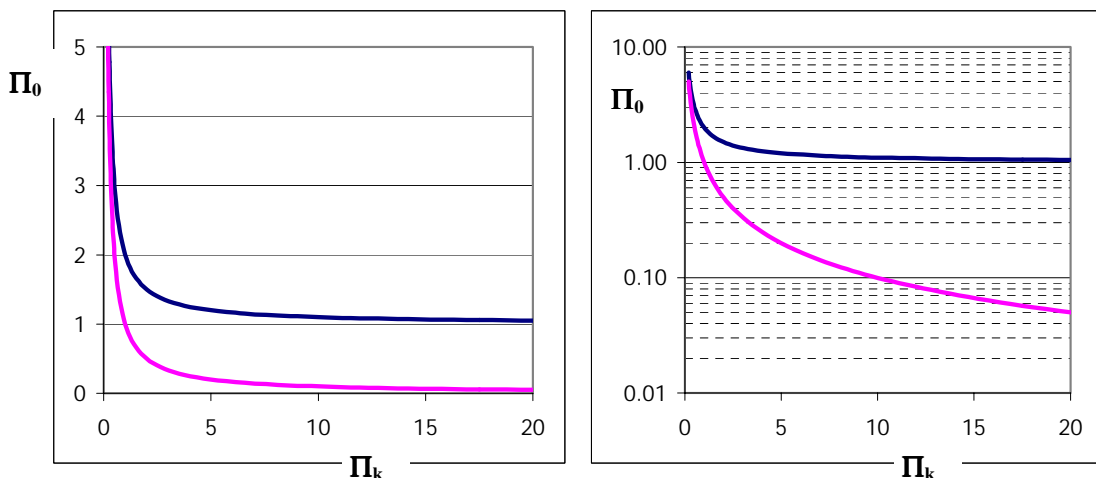


Figura 2.2 - Esempio di autosimilitudine completa (curva superiore) ed incompleta (curva inferiore). La scala bilogaritmica evidenzia come, per il caso di autosimilitudine incompleta, la dipendenza di Π_0 da Π_k non svanisca al crescere di Π_k .

2.4 GRUPPI Π SIGNIFICATIVI IN IDRAULICA

In un problema di tipo idraulico, una generica variabile di stato G risulta tipicamente funzione delle grandezze meccaniche indicate nella relazione (2.8).

$$G = f(\rho, \mu, \varepsilon, s, g, L, \theta, r, V, a, p / x, y, z, t) \quad (2.8)$$

$\rho, \mu, \varepsilon, s$: rispettivamente densità, viscosità dinamica, comprimibilità e tensione superficiale del fluido o dei fluidi che interessano il problema in esame. Densità e comprimibilità possono comparire anche in relazione a solidi.

g : accelerazione di gravità. Deve essere inserita, anche se in generale è un parametro di valore fissato, ogniqualevolta siano presenti superfici di separazione fra fluidi (in particolare superfici a contatto con l'aria), o comunque sistemi di fluidi e/o solidi con densità diverse, e quindi azioni di galleggiamento.

L : tutte le lunghezze (o aree, volumi) che caratterizzano le dimensioni del dominio in cui si verifica il fenomeno in esame, ovvero sia le sue condizioni al contorno geometriche.

θ : tutti gli angoli, o più in generale i coefficienti che caratterizzano la forma del dominio in cui si verifica il fenomeno in esame.

r : scabrezze superficiali.

V, a : tutti i valori di velocità e accelerazione di controllo per il sistema (ovverosia imposte su di esso). In generale si tratta delle distribuzioni spazio-temporali della velocità all'ingresso del sistema (condizioni al contorno cinematiche), ed eventualmente dei contorni fisici. Spesso le distribuzioni di velocità dei fluidi possono essere (almeno in prima approssimazione) definite da un unico valore (medio) caratteristico della velocità. In luogo di un valore di insieme di velocità si può assumere quale variabile indipendente la portata.

p : valori di pressione imposti al contorno, ovvero forze distribuite o concentrate che agiscono sul sistema (la forza peso è già contenuta in p e g).

x, y, z, t : coordinate spaziali e temporali, se necessarie.

Come già discusso, qualsiasi terna di grandezze fra loro dimensionalmente indipendenti può essere scelta quale base per la adimensionalizzazione della (2.8). Una tipica scelta nel caso di fenomeni fluidodinamici turbolenti è una terna del tipo (ρ, L, V) ; per fenomeni di tipo laminare si preferisce in genere la terna (μ, L, V) . Si ricorda che fra tutti i possibili valori di densità (viscosità), lunghezza, velocità presenti nella lista delle variabili indipendenti, è opportuno scegliere quelli presumibilmente più importanti per il fenomeno, ovverosia quelli che abbiano un effetto sicuramente significativo per la variabile G in esame.

Si elencano di seguito alcuni gruppi adimensionali correlati alle variabili della (2.8) sulla base della terna (ρ, L, V) , discutendone il significato fisico.

$\frac{\rho V D}{\mu}$	Re (n° di Reynolds)	$\frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze viscos e}}$
$\frac{V}{\sqrt{g L}}$	Fr (n° di Froude)	$\frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze peso}}$
$\frac{\rho V^2}{\epsilon}$	Ca (n° di Cauchy)	$\frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze di c omprimibilità}}$
$\frac{V}{c}$	Ma (n° di Mach)	
$\frac{\rho V^2 L}{s}$	We (n° di Weber)	$\frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze di tensione sup erficiale}}$
$\frac{L / V}{t}$	St (n° di Strouhal)	$\frac{\text{inerzia locale}}{\text{inerzia globale (convettiva)}}$
$\frac{p}{\rho V^2}$	Eu (n° di Eulero)	$\frac{\text{forze di pressione}}{\text{forze d'inerzia}}$

- Re Di importanza generale in tutti i problemi fluidodinamici, determina la transizione laminare-turbolenta. La dipendenza dal numero di Reynolds si verifica quando nel fenomeno risultano significative sia le forze di inerzia (più o meno turbolente, ma comunque legate alla densità ρ) che le forze viscos e (legate alla viscosità μ). Numeri di Reynolds "molto piccoli" ovvero "molto grandi" (le soglie dipendono dal fenomeno) indicano che le forze viscos e prevalgono su quelle inerziali, o viceversa, fino ai limiti in cui la densità o la viscosità risultino trascurabili per il fenomeno in esame.
- Fr Interessa problemi con superfici libere. Essendo \sqrt{gh} = celerità delle perturbazioni in una corrente di profondità h , è anche $Fr = \text{velocità di una corrente} / \text{celerità delle piccole perturbazioni}$. Come noto $Fr = 1$ è la soglia che divide la natura lenta o veloce di una corrente a superficie libera.
- Ca, Ma Sono legati dalla relazione fra comprimibilità e celerità delle perturbazioni elastiche (suono): $c = \sqrt{\epsilon / \rho}$, risultando pertanto $Ca = Ma^2$. Per $Ma < 0.3$ gli effetti di comprimibilità possono in generale essere trascurati, almeno in prima approssimazione, cosicché il comportamento di un gas è assimilabile a quello di un liquido.
- We Risulta di interesse laddove esistano interfacce fra fluidi diversi; in questo caso la tensione superficiale può a priori assumere un ruolo significativo. Si può mostrare che la radice quadrata di We è anche il rapporto fra la velocità del campo di moto e la celerità di onde capillari. In problemi pratici il numero di Weber è generalmente elevato, ad indicare che le azioni dovute alla tensione superficiale sono trascurabili rispetto alle altre forze, sicché il parametro s può essere considerato ininfluenza. Per modelli a scala ridotta è però necessario verificare che il numero di Weber non sia

troppo basso.

- St Può essere espresso in termini di una scala temporale, ovvero di una frequenza f caratteristica del fenomeno ($St = f L / V$). Rappresenta il rapporto fra le forze inerziali (le accelerazioni locali, lagrangiane) dovute alla non stazionarietà del campo di moto e quelle dovute alla variazione di velocità fra i punti del campo (accelerazioni convettive, euleriane). Da un altro punto di vista, ma con il medesimo significato, rappresenta il rapporto fra i tempi caratteristici di transito nel campo di moto e i tempi caratteristici delle variazioni (oscillazioni) non stazionarie.
- Eu Rapporto fra forze di pressione (spesso dipendenti da un differenziale Δp) e forze inerziali. Sotto la forma $\Delta p / (\frac{1}{2} \rho V^2)$ è indicato "Coefficiente di pressione". Analoghi coefficienti sono definiti per le forze; tipici esempi i coefficienti di Drag, Lift = $F / (\frac{1}{2} \rho V^2 A)$, dove A è un'area caratteristica del sistema.

2.5 ULTERIORI ESEMPI: MOTO NEI TUBI SCABRI

Per generalizzare il problema affrontato nei paragrafi 1 e 2.2 (perdite di carico distribuite per condotti circolari in pressione) al caso di tubo scabro, deve essere aggiunta alla lista dei parametri di controllo la scabrezza superficiale r caratteristica del tubo³; mantenendo (D , V , ρ) quali grandezze fondamentali si ottiene pertanto:

$$\Pi_{\Delta p/L} = \frac{\Delta p / L}{\rho V^2 / D} = f\left(\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu}, \frac{r}{D}\right) \quad (2.A)$$

Si noti che il gruppo adimensionale $\Pi_{\Delta p/L}$ risulta pari a $\lambda/2$, essendo λ l'indice di resistenza dell'abaco di Moody.

La dipendenza delle perdite dai parametri di controllo del sistema viene definita da una doppia infinità di esperimenti al variare dei due gruppi adimensionali.

Alcune specifiche osservazioni possono essere svolte distinguendo i due fondamentali regimi di moto (laminare, turbolento).

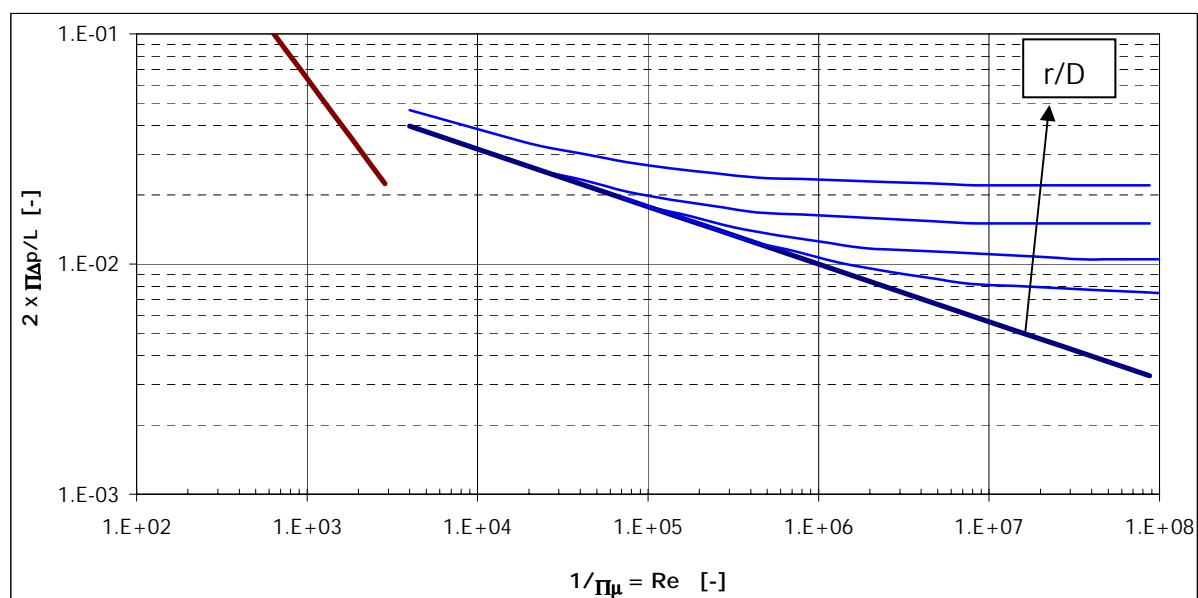


Figura 2.3 - Andamenti del coefficiente adimensionale di resistenza in funzione di Re e di r/D (abaco di Moody).

³ Nell'analisi dei tubi lisci ($r = 0$) si era eliminato dall'analisi dimensionale il parametro relativo alla scabrezza. Si ricorda che, in generale, *non è lecito* eliminare un parametro *dimensionale* di controllo anche se esso viene mantenuto costante, in quanto il gruppi *adimensionale* ad esso associato possono variare al variare degli altri parametri. Nel caso speciale di valore identicamente nullo, però, è chiaro che il valore costante del parametro dimensionale ($r \equiv 0$) implica necessariamente valore costante per ogni gruppo adimensionale ad esso associato ($\Pi_r \equiv 0$), e quindi il parametro può essere eliminato a priori dall'analisi.

Regime laminare

Nel caso di moto laminare, sia analisi concettuali a priori, sia i risultati sperimentali indicano che $\Pi_{\Delta p/L}$ (ovverosia λ) è indipendente dalla scabrezza del tubo. In particolare risulta:

$$\Pi_{\Delta p/L} = f(\text{Re}) = \frac{32}{\text{Re}} \quad (2.B)$$

dove la proporzionalità inversa fra $\Pi_{\Delta p/L}$ e Re , determinabile per via sperimentale, è confermata dalla soluzione analitica del moto (si veda il testo di Citrini e Nosedà).

Nel caso di regime laminare, il moto è governato dagli sforzi viscosi (proporzionali alla viscosità μ) più che a quelli inerziali/turbolenti (legati alla densità ρ del fluido); di conseguenza è ragionevole la scelta della terna (D, V, μ) in alternativa alla più usuale (D, V, ρ) . I gruppi adimensionali risultanti sono allora:

$$\Pi'_{\Delta p/L} = \frac{\Delta p/L}{\mu V/D^2} = f(\text{Re}) \quad (2.C)$$

(si noti che il numero di Reynolds è il rappresentante di μ rispetto alla terna (D, V, ρ) così come il rappresentante di ρ rispetto alla terna (D, V, μ)).

Rispetto alla nuova terna, la legge di resistenza per il caso laminare si riduce a:

$$\Pi'_{\Delta p/L} = \text{cost} = 32 \quad (2.D)$$

(le resistenze *non* dipendono dal numero di Reynolds, ovverosia non dipendono da ρ).

Le (2.B) e (2.D) sono peraltro fra loro riconducibili esplicitando l'espressione del numero di Reynolds a secondo membro della (2.B); nonostante la completa equivalenza delle due forme, nella (2.D) il coefficiente adimensionale delle perdite di carico non dipende da alcun parametro adimensionale di controllo, mentre nella (2.B) si evidenzia la dipendenza da Reynolds. La differenza nel numero di variabili indipendenti è causata dal fatto che nella (2.C), la scelta della densità ρ per la terna base di adimensionalizzazione ha forzato tale parametro ad apparire nella formula che esprime le perdite, nonostante esso sia del tutto ininfluenza per il caso laminare.

Sebbene non formalmente necessario, per evitare di complicare le analisi (e le formule che ne derivano), è bene scegliere i parametri base fra le grandezze che sicuramente influiscono sul fenomeno per tutto il campo di interesse.

Regime turbolento

Per regime di moto turbolento, il fenomeno è indubbiamente influenzato dalle forze di inerzia oltre che da quelle viscosi, sicché la terna base (D, V, ρ) e le conseguenti normalizzazioni sono senza dubbio significative. In generale vale la (2.A), dipendendo il coefficiente delle perdite distribuite sia da Re che da r/D .

In riferimento al campo turbolento della figura 2.3 si sottolineano due aspetti caratteristici:

- 1) Per ogni valore di r/D esiste un limite superiore di Re oltre cui svanisce la dipendenza del coefficiente di perdita dal numero di Reynolds (autosimilitudine rispetto a Re):

$$\lim_{\text{Re} \rightarrow \infty} \Pi_{\Delta p/L} = f(r/D) \quad (\exists \text{ finito})$$

Il campo di autosimilitudine rispetto al numero di Reynolds è usualmente indicato come "moto *assolutamente* turbolento".

- 2) Per ogni valore di Re esiste un limite inferiore di r/D al di sotto del quale svanisce la dipendenza del coefficiente di perdita dalla scabrezza (autosimilitudine rispetto a r):

$$\lim_{r/D \rightarrow 0} \Pi_{\Delta p/L} = f(\text{Re}) \quad (\exists \text{ finito})$$

Come peraltro è ovvio, per valori molto piccoli della scabrezza, le curve collassano sulla curva caratteristica dei tubi lisci.

2.6 TEOREMA II NEI MODELLI MATEMATICI

Il teorema II può essere utilmente applicato anche all'analisi di modelli matematici, ovvero sia delle equazioni che governano un dato fenomeno. Non si vuole in questa sede approfondire l'argomento in termini generali, per cui si rimanda al già citato testo di Barenblatt; ci si limita ad un significativo esempio, analizzando le equazioni generali del moto dei fluidi (equazioni di Navier-Stokes) alla luce dell'analisi dimensionale.

Le equazioni di Navier-Stokes possono essere scritte, in forma vettoriale, come:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \text{ grad}(\vec{v}) = \nu \nabla^2 (\vec{v}) + \frac{1}{3} \nu \text{ grad div}(\vec{v}) - \frac{1}{\rho} \text{ grad}(p) + \vec{g} \quad (2.9)$$

dove g è l'accelerazione gravitazionale (supposta unica forza esterna). Scelta come terna base (ρ, L, V) , dove L e V sono una lunghezza e una velocità caratteristiche del fenomeno (legate, per esempio, alle condizioni al contorno) si possono definire le variabili adimensionali:

$$\tilde{x} = \frac{\bar{x}}{L}$$

$$\tilde{v} = \frac{\bar{v}}{V}$$

$$\tilde{t} = \frac{t}{L/V}$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho V^2}$$

Le equazioni del moto possono essere riscritte in forma adimensionale:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \text{ grad}(\tilde{v}) = \frac{\nu}{VL} \left(\nabla^2(\tilde{v}) + \frac{1}{3} \text{ grad div}(\tilde{v}) \right) - \text{grad}(\tilde{p}) + \frac{L \vec{g}}{V^2} \quad (2.10)$$

La (2.10) indica che due fenomeni governati da tale equazione hanno la *medesima soluzione* in termini di variabili adimensionali se i gruppi adimensionali caratteristici dei due fenomeni:

$$\text{Re} = \frac{VL}{\nu}$$

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

assumono il medesimo valore. Due fenomeni descritti dai medesimi parametri adimensionali, e che differiscono solo per i relativi valori dimensionali, saranno definiti quali *simili* nel paragrafo 3.

Le osservazioni ora svolte non sono di aiuto nella soluzione delle equazioni del moto, ma

forniscono un criterio *a priori* per determinare i parametri che influenzano un fenomeno fluidodinamico dalla sola analisi delle equazioni generali che lo governano, anche senza conoscerne la soluzione. Considerazioni più attente portano tuttavia a riconoscere che l'eguaglianza dei due soli parametri adimensionali (Re, Fr) nelle (2.10) non è in effetti sufficiente per garantire un'unica soluzione adimensionale. A tale scopo devono essere anche identici i valori (sempre adimensionali) che definiscono le condizioni al contorno, che determinano la soluzione unitamente alle equazioni del moto⁴. Nessun problema particolare nasce invece dall'equazione di continuità, da associare alle equazioni scritte.

Nel caso di fluidi *incomprimibili* le equazioni del moto (2.9)-(2.10) possono essere semplificate. Detta z la coordinata verticale, si può scrivere:

$$\bar{g} = -g \text{ grad}(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \text{ grad}(p) + \bar{g} = \frac{1}{\rho} \text{ grad}(p + z\gamma) \quad (2.11)$$

Definita allora la variabile $p^* = p + z\gamma$, ed essendo $\text{div}(\bar{v}) = 0$, risulta:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \text{ grad}(\bar{v}) = \nu \nabla^2(\bar{v}) - \frac{1}{\rho} \text{ grad}(p^*) \quad (2.9')$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \text{ grad}(\tilde{v}) = \frac{\nu}{V L} \nabla^2(\tilde{v}) - \text{grad}(\tilde{p}^*) \quad (2.10')$$

Dalle equazioni ora scritte appare evidente che l'accelerazione di gravità non influisce sul campo di moto, ovverosia sulla distribuzione di velocità che si determina dalle (2.9')-(2.10') (si noti che nell'equazione di continuità per fluidi incomprimibili non compare la pressione). Contemporaneamente si è mostrato come il campo di pressione p può essere scomposto in una componente p^* dipendente dai soli effetti dinamici, e dalla residua componente $p - p^* = z\gamma$, coincidente con la distribuzione idrostatica, che non ha alcun effetto sul campo di moto.

Nella (2.10') è scomparsa la dipendenza dal numero di Froude: se ne dedurrebbe che i processi fluidodinamici non dipendono da tale gruppo adimensionale. Ciò risulta in effetti vero, purché la dipendenza dalla gravità non rientri nelle condizioni al contorno, e quindi in assenza di superfici a pelo libero (ad esempio nello studio delle perdite di carico nelle condotte in pressione non è necessario considerare alcuna dipendenza da Fr).

⁴ Si noti che, nel caso generale in cui si considerino fluidi a densità e viscosità non costante, si deve anche garantire l'eguaglianza adimensionale delle funzioni di stato che determinano ρ e μ in funzione di pressione e temperatura, nonché l'equazione che esprime la conservazione dell'energia per determinare le distribuzioni di temperatura nel fluido.